

УДК 532.582.7

ГИДРОМЕХАНИКА

Член-корреспондент АН СССР В. Г. ЛЕВИЧ, С. И. КУЧАНОВ

ДВИЖЕНИЕ ЧАСТИЦ, ВЗВЕШЕННЫХ В ТУРБУЛЕНТНОМ ПОТОКЕ

В данной работе будет рассматриваться вопрос о движении твердых частиц относительно турбулентного газа, в котором они взвешены. Однако полученные результаты могут быть также применены к движению твердых частиц, недеформированных капель и пузырьков в жидкости, а также мелких капель в потоке турбулентного газа. Дальнейшее рассмотрение будет касаться только случая, когда удельный объем, занимаемый частицами γ , мал по сравнению с единицей.

Мы будем при этом предполагать, что влиянием частиц на движение газа можно пренебречь. Границы применимости данного допущения будут подробно рассмотрены в следующей статье. Турбулентный поток будет предполагаться локально однородным, изотропным и стационарным, а размер взвешенных частиц R настолько меньшим внутреннего масштаба турбулентности l , чтобы числа Рейнольдса относительного движения частиц и газа были малы по сравнению с единицей. Уравнение движения частиц, удовлетворяющих этому условию, было написано Ченом, а затем уточнено Корсиным и Ламли ⁽¹⁾. Это уравнение связывает скорость движения частицы в газе W_i со скоростью движения газа U_i , окружающего частицу. Оно является, вообще говоря, нелинейным уравнением с частными производными. Однако это уравнение переходит в линейное интегро-дифференциальное, в котором единственной независимой переменной является только время, если выполняются неравенства:

$$\frac{R^2}{\nu} \frac{\partial U}{\partial x} \ll 1, \quad \frac{W}{\nu} \frac{\partial U}{\partial x} \bigg/ \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \gg 1,$$

где ν — кинематическая вязкость газа.

Пусть U_λ и ω_λ — скорости и частоты пульсаций, размер которых порядка λ . Учитывая, что скорость частиц близка к U_L — скорости самых крупных пульсаций газа, имеющих масштаб L порядка размеров системы, оценим члены, входящие в неравенства:

$$\begin{aligned} \frac{W}{\nu} \frac{\partial U}{\partial x} \bigg/ \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} &\sim \frac{W}{\nu} \frac{U_\lambda}{\lambda} \bigg/ \frac{U_\lambda}{\lambda^2} \sim \frac{U_L \lambda}{\nu} > \frac{U_L L}{\nu} \frac{l}{L} \sim \text{Re}_L^{1/4} \gg 1, \\ \frac{R^2}{\nu} \frac{\partial U}{\partial x} &\sim \frac{R^2}{\nu} \frac{U_\lambda}{\lambda} \sim \frac{R^2}{\nu} \omega_\lambda < \frac{R^2}{\nu} \frac{\nu}{l^2} \sim \frac{R^2}{l^2} < 1. \end{aligned}$$

Таким образом, из приведенных выше оценок следует, что при условии $R < l$ уравнение установившегося относительного движения частиц имеет вид

$$\frac{dV_i}{dt} = (\alpha - 1) \frac{dU_i}{dt} - \beta V_i - \sqrt{\frac{3\alpha\beta}{\pi}} \int_{-\infty}^t \frac{dV_i}{d\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} + g_i. \quad (1)$$

В формуле (1) использованы следующие обозначения: $V_i = W_i - U_i$ — скорость движения частицы относительного газа; $\alpha = 3\rho_0 / (2\rho + \rho_0)$, где ρ_0 — плотность газа, ρ — плотность частиц; g_i — ускорение свободного падения; $\beta = k_1 \alpha \nu / R^2$ — характерная частота, определяющая движение частиц в газе и обратная времени, необходимому для того, чтобы обтекающий частицу газ мог вывести ее из состояния покоя. Величина k_1 , как и встречающиеся в дальнейшем величины $k_2, k_3, \dots$, — численные постоянные по-

рядка единицы. В силу линейности уравнения (1) скорость V_i есть суперпозиция двух независимых величин: скорости, обусловленной наличием поля тяжести, и скорости, связанной с движением газа. Поскольку в данной работе нас будет интересовать движение частицы, обусловленное движением газа, то величину g_i в уравнении (1) можно опустить. Однако из-за того, что это уравнение линейно, полученные результаты все же будут справедливы и при наличии поля тяжести. В нашем предположении $R < l$ уравнение (1) допускает дальнейшие упрощения. Можно показать ⁽²⁾, что интегральный член в уравнении (1) мал по сравнению с остальными, если для всех частот турбулентного спектра справедливо неравенство $\omega_\lambda R^2 / \nu \ll 1$. Это неравенство, как нетрудно заметить, эквивалентно неравенству $R^2 < l^2$. Действительно:

$$\omega_\lambda R^2 / \nu < \omega_l R^2 / \nu \sim R^2 / l^2.$$

Таким образом, уравнение относительного движения частицы в газе в наших предположениях имеет вид

$$\frac{dV_i}{dt} = (\alpha - 1) \frac{dU_i}{dt} - \beta V_i. \quad (2)$$

В турбулентном потоке скорости U_i и V_i являются случайными функциями времени. Для определения характеристик движения частиц относительно газа необходимо знать связь между лагранжевой временной корреляцией величины U_i и лагранжевой временной корреляцией величины V_i . Поэтому установим связь между корреляционными функциями

$$Q = \overline{U_i(t) U_i(t + \tau)}, \quad S = \overline{V_i(t) V_i(t + \tau)}.$$

Черта означает усреднение по всем состояниям системы. Для рассматриваемой задачи в силу условия стационарности Q и S являются функциями только времени корреляции τ и не зависят от t .

Для нахождения связи между $Q(\tau)$ и $S(\tau)$ разложим U_i и V_i в интегралы Фурье, а затем, воспользовавшись уравнением (2), установим связь между спектральной функцией $\Phi(\omega)$ поля скоростей V_i и спектральной функцией $\Psi(\omega)$ поля скоростей U_i

$$\Phi(\omega) = (1 - \alpha)^2 \frac{\omega^2}{\omega^2 + \beta^2} \Psi(\omega). \quad (3)$$

Вследствие того что корреляционная функция является просто преобразованием Фурье от соответствующей спектральной функции, можно с учетом формулы (3) написать

$$S(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1 - \alpha)^2 \omega^2}{\omega^2 + \beta^2} \Psi(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega. \quad (4)$$

Для того чтобы установить связь между интегралом в формуле (4) с корреляционной функцией $Q(\tau)$, нужно использовать формулу Парсеваля. Вследствие того что

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega^2}{\omega^2 + \beta^2} e^{i\omega\tau} d\omega = \delta(\tau) - \frac{\beta}{2} e^{-\beta|\tau|}$$

и так как

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega = Q(\tau),$$

то

$$S(\tau) = (1 - \alpha)^2 \left[Q(\tau) - \frac{\beta}{2} \int_{-\infty}^{\infty} Q(\xi) e^{-\beta|\tau - \xi|} d\xi \right]. \quad (5)$$

Воспользовавшись четностью функции $Q(\xi)$, формулу (5) можно представить в виде

$$S(\tau) = (1 - \alpha)^2 \left[Q(\tau) - \frac{\beta}{2} \int_0^{\infty} Q(\xi) (e^{-\beta(\tau+\xi)} + e^{-\beta(\tau-\xi)}) d\xi \right]. \quad (6)$$

Из выражения (6) видно, что для определения $S(\tau)$ необходимо знать лагранжеву корреляцию во времени скоростей газа в данном потоке. Так как по сделанному ранее предположению наличие в потоке частиц не влияет на движение газа, то в формулу (6) следует подставить корреляционную функцию $Q(\tau)$ газа, не содержащего взвешенных частиц. Теоретической формулы для $Q(\tau)$, применимой для всех времен корреляции, вообще говоря, не существует. Однако можно воспользоваться эмпирической формулой, приближенно описывающей поведение корреляционной функции. Для больших чисел Рейнольдса движения газа в качестве такой формулы следует выбрать экспоненциальную функцию ^(3, 4). Следовательно, если предположить, что $Q(\tau) = Q(0) \exp \{-\omega_L \tau\}$, то из формулы (6) можно определить $S(\tau)$:

$$S(\tau) = (1 - \alpha)^2 Q(0) \frac{\omega_L^2}{\omega_L^2 - \beta^2} \left[e^{-\omega_L \tau} - \frac{\beta}{\omega_L} e^{-\beta \tau} \right]. \quad (7)$$

Зная корреляционную функцию относительного движения частиц, можно определить характеристики их движения относительно газа. Важнейшими такими характеристиками являются средняя квадратичная скорость $(\overline{V^2})^{1/2}$ и средняя амплитуда колебаний a . Из определения корреляционных функций следует, что $Q(0) = \overline{U^2}$, $S(0) = \overline{V^2}$, поэтому

$$\overline{V^2} = \overline{U^2} \frac{(1 - \alpha)^2 \omega_L}{\omega_L + \beta} \approx U_L^2 \frac{(1 - \alpha)^2 \omega_L}{\omega_L + \beta}. \quad (8)$$

Из формулы (8) непосредственно следует, что если частицы взвешены в газовом потоке ($\alpha \sim 10^{-3}$), а размеры их не слишком малы (так что $\beta \ll \omega_L$), то средняя квадратичная скорость относительного движения частиц будет совпадать со средней скоростью турбулентных пульсаций газа. Если же частицы взвешены в турбулентной жидкости, то в этом случае всегда $\beta \gg \omega_L$ и средняя квадратичная скорость относительного движения $(\overline{V^2})^{1/2}$ всегда намного меньше средней квадратичной скорости жидкости $(\overline{U^2})^{1/2}$.

Так как в турбулентном потоке на движение частицы оказывают влияние все частоты спектра турбулентности, то очевидно, что под средней амплитудой колебаний частиц нужно понимать среднее квадратичное смещение частицы относительно газа $[\overline{r^2(t)}]^{1/2}$ за достаточно большое время, т. е. при $t \rightarrow \infty$. В силу того, что величины r_i и V_i связаны соотношением $r_i(t) = \int_0^t V_i(t') dt'$ и случайная функция $V_i(t)$ стационарна, можно выразить среднее квадратичное смещение $[\overline{r^2(t)}]^{1/2}$ через корреляционную функцию $S(\tau)$ ^[5]

$$\overline{r^2(t)} = 2 \int_0^t (t - \tau) S(\tau) d\tau. \quad (9)$$

Несмотря на стационарность функции $V_i(t)$, среднее квадратичное смещение частиц, как видно, является функцией времени. Это обстоятельство связано с тем, что интеграл от стационарной случайно функции, вообще говоря, свойством стационарности не обладает ⁽⁵⁾. Подставляя в (9) функцию $S(\tau)$, определяемую формулой (7), и производя интегрирование,

получим

$$\overline{r^2(t)} = (1 - \alpha)^2 \frac{\overline{2U^2}}{\omega_L^2 - \beta^2} \left[\frac{\omega_L}{\beta} (1 - e^{-\beta t}) - (1 - e^{-\omega_L t}) \right], \quad (10)$$

$$a^2 = \lim_{t \rightarrow \infty} r^2(t) = \frac{\overline{2U^2}}{\beta(\omega_L + \beta)} \approx \frac{2U_L^2}{\beta(\omega_L + \beta)}. \quad (11)$$

Сравнивая величину a с размером пульсаций, имеющих наибольший масштаб $L \sim U_L / \omega_L$, получим

$$a/L \sim \omega_L / \sqrt{\beta(\omega_L + \beta)}. \quad (12)$$

Формула (12) показывает, что в случае движения частиц в газовом потоке при условии $\overline{V^2} = \overline{U^2}$ величина a может значительно превышать L . Для обратного предельного случая $\beta \gg \omega_L$ среднее квадратичное смещение частиц a будет много меньше размеров самых крупных турбулентных пульсаций L . В этом случае движение частицы, взвешенной в турбулентном потоке, за достаточно большие интервалы времени можно представить себе как суперпозицию движения, обусловленного ее увлечением крупными вихрями и хаотического блуждания относительно газа или жидкости внутри области, размеры которой порядка a .

Институт электрохимии
Академии наук СССР

Поступило
7 IX 1966

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ S. Corsin, J. Lamley, Appl. Sci. Res., 6A, 114 (1956). ² Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Механика сплошных сред, 1953. ³ G. Taylor, Proc. London Math. Soc., 20, 196 (1921). ⁴ A. A. Kalinske, C. L. Pien, Ind. and Eng. Chem., 36, 220 (1944). ⁵ А. А. Свешников, Прикладные методы теории случайных функций, 1961.