

Член-корреспондент АН СССР В. Г. ЛЕВИЧ и Ю. Я. ГУРЕВИЧ

ВЛИЯНИЕ МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА ПОВЕРХНОСТНЫЕ ВОЛНЫ В ПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ

В данной работе рассматривается влияние внешнего магнитного поля на процесс распространения гравитационно-капиллярных волн в проводящей жидкости.

Выберем ось z в направлении поля тяжести и будем считать, что пространство $z < 0$ заполнено идеальной несжимаемой жидкостью, находящейся во внешнем однородном магнитном поле $\mathbf{H}_0$ и в поле тяжести. Проводимость жидкости предполагается бесконечной. Ниже будет показано, что при волновом движении проводящей жидкости генерируется дополнительное переменное поле $\mathbf{h}$. Если амплитуда волны a много меньше длины волны λ , то ⁽¹⁾ в уравнениях движения среды можно пренебречь членом $(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v}$ по сравнению с $\partial \mathbf{v} / \partial t$. Оказывается, что это же условие является достаточным для того, чтобы магнитное поле $\mathbf{h}$ было много меньше внешнего поля $\mathbf{H}_0$. В этих предположениях уравнения магнитной гидродинамики ⁽²⁾ линеаризуются, и их можно записать в виде

$$\partial \mathbf{v} / \partial t = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g} + \frac{1}{4\pi\rho} [\text{rot } \mathbf{h} \mathbf{H}_0], \quad \partial \mathbf{h} / \partial t = \text{rot } [\mathbf{v} \mathbf{H}_0], \quad (1)$$

$$\text{div } \mathbf{v} = 0, \quad \text{div } \mathbf{h} = 0.$$

Электрическое поле внутри жидкости после решения системы (1) может быть найдено ⁽²⁾ из $\mathbf{E} = -\frac{1}{c} [\mathbf{v} \mathbf{H}_0]$. Граничными условиями к этим уравнениям служат непрерывность на поверхности жидкости магнитного и электрического полей, а также давления.

Будем искать периодическое решение системы (1), т. е. предположим, что $\mathbf{v}$ и $\mathbf{h}$ пропорциональны $e^{-i\omega t}$.

После некоторых преобразований систему (1) можно переписать в виде

$$\text{rot} \left\{ \omega^2 \mathbf{v} + \frac{1}{4\pi\rho} (\mathbf{H}_0 \nabla)^2 \mathbf{v} \right\} = 0, \quad \text{div } \mathbf{v} = 0, \quad -i\omega \mathbf{h} = (\mathbf{H}_0 \nabla) \mathbf{v}. \quad (2)$$

Уравнение $\text{div } \mathbf{h} = 0$ удовлетворяется автоматически. Из (2) видно, что можно ввести функцию ϕ , являющуюся некоторым аналогом потенциала скоростей $\mathbf{v} = \nabla \phi$ и определяемую формулой

$$\nabla \phi = \omega^2 \mathbf{v} + \frac{1}{4\pi\rho} (\mathbf{H}_0 \nabla)^2 \mathbf{v}. \quad (3)$$

Подстановка (3) в (2) даст

$$\Delta \phi = 0. \quad (4)$$

Ниже мы ограничимся случаем, когда внешнее поле $\mathbf{H}_0$ направлено по оси z . Решение последнего уравнения ищем в виде

$$\phi = C e^{ikx + kz}. \quad (5)$$

Ось x ориентируем в направлении распространения волны. Тогда (3) переходит в

$$\omega^2 \mathbf{v} + \frac{\mathbf{H}_0^2}{4\pi\rho} \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial z^2} = C \nabla e^{ikx + kz}. \quad (6)$$

Частным решением (6) для компонент скорости служит

$$v_x = \frac{4\pi\rho k i}{4\pi\rho\omega^2 + k^2 H_0^2} C e^{ikx+kz}, \quad v_y = 0, \quad v_z = \frac{4\pi\rho k}{4\pi\rho\omega^2 + k^2 H_0^2} C e^{ikx+kz}. \quad (7)$$

Это решение описывает поверхностные волны и совпадает по форме с решением в отсутствие внешнего поля $\mathbf{H}_0$. К решению (7) необходимо, однако, еще прибавить решение однородного уравнения

$$\omega^2 \mathbf{v} + \frac{H_0^2}{4\pi\rho} \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial z^2} = 0. \quad (8)$$

Последнее описывает альфвеновскую волну, распространяющуюся в глубь жидкости. Учитывая, что зависимость от времени уже явно выделена в форме $e^{-i\omega t}$, получаем

$$\mathbf{v} = \mathbf{B} e^{-\ell(pz + \omega t)}, \quad (9)$$

где $p = 4\pi\rho\omega^2/H_0^2$.

В силу периодичности всех происходящих в волне процессов, следует $\mathbf{B}$ брать в виде $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 e^{ikx}$, где $\mathbf{B}_0$ — постоянный вектор. Кроме того, решение (9) должно удовлетворять $\text{div } \mathbf{v} = 0$. Отсюда получаем одно соотношение между компонентами $\mathbf{B}_0$

$$kB_{0x} - pB_{0z} = 0. \quad (10)$$

Остальные две неизвестные компоненты вектора $\mathbf{B}_0$ должны быть определены из граничных условий. Для этого необходимо найти электромагнитное поле в полупространстве над жидкостью. Для вектора - потенциала электромагнитного поля $\mathbf{A}$ имеем уравнение

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0. \quad (11)$$

Поскольку возникающие в жидкости электрическое и магнитное поля пропорциональны $e^{i(kx - \omega t)}$, необходимо потребовать

$$\mathbf{A}|_{z=0} = \mathbf{A}_0 e^{i(kx - \omega t)}. \quad (12)$$

Решением уравнения (11), удовлетворяющим граничному условию (12), служит

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 e^{\ell(hx - \omega t) - \kappa z}, \quad (13)$$

где $\kappa^2 = k^2 - \omega^2/c^2$, а $\mathbf{A}_0$ — постоянный вектор. Таким образом, электромагнитное поле локализовано в пространстве над жидкостью в слое, толщина которого примерно равна длине поверхностной волны λ . Электрическое и магнитное поля должны быть непрерывны на поверхности жидкости. В силу условия $\alpha \ll \lambda$ можно приближенно считать, что условие непрерывности полей должно выполняться в плоскости $z = 0$. Зная распределение скоростей внутри жидкости (7) и (9), определим, используя (2) и (3), электрическое и магнитное поля, которые должны совпадать при $z = 0$ с полями, получаемыми из решения (13). Учитывая, что $\kappa^2 \simeq k^2$, найдем

$$A_{0x} = 0, \quad A_{0y} = \frac{4\pi\rho k}{4\pi\rho\omega^2 + k^2 H_0^2} C \frac{H_0}{\omega}, \quad A_{0z} = 0, \quad \mathbf{B}_0 = 0. \quad (14)$$

Из (14) и (7) заключаем, что частицы жидкости в волне описывают окружности с радиусом, экспоненциально падающим по направлению в глубь жидкости. Остается установить закон дисперсии для рассматриваемых волн.

Из (1) для давления в жидкости получаем

$$p = p_0 + \frac{i\omega\rho}{k} v_z - g\rho z; \quad (15)$$

p_0 — постоянная давления (включающая статическую часть давления, связанную с постоянным полем $\mathbf{H}_0$). Давление над поверхностью жидкости пред-

ставим в виде

$$p = p_r + T_{zz}, \quad (16)$$

где p_r — давление газа над жидкостью и

$$T_{zz} = \frac{1}{4\pi} \left\{ -E_z^2 - H_z^2 + \frac{1}{2}(E^2 + H^2) \right\} \quad (17)$$

компонента максвелловского тензора напряжений.

Из (3) имеем $h \sim vH_0/\omega\lambda$, но $v/\omega \sim a$, откуда $h/H_0 \sim a/\lambda$, так что действительно

$$h/H_0 \ll 1, \quad (18)$$

чем оправдано первоначальное предположение.

Исходя из (16) и (17) с учетом (18) для давления вне жидкости можно написать

$$p \simeq p_0 - H_0 h_z / 4\pi. \quad (19)$$

На поверхности жидкости (15) должно совпадать с (19). Обозначая смещение жидких частиц из положения равновесия на поверхности через ζ , получим условие:

$$\frac{i\omega\rho}{k} v_z \Big|_{z=\zeta} - g\zeta\rho = \frac{H_0}{4\pi i\omega} \frac{\partial}{\partial z} v_z \Big|_{z=\zeta}. \quad (20)$$

Поскольку $a \ll \lambda$, можно считать, что $v_z = \partial\zeta/\partial t$. В силу этого же условия с точностью до величин второго порядка малости (20) должно выполняться при $z = 0$. Дифференцируя (20) по t и сокращая $v_z|_{z=0}$, получим

$$\frac{\omega\rho}{k} - g\rho = -\frac{H_0^2}{4\pi} k. \quad (21)$$

Соотношение (21) представляет закон дисперсии для магнитногидродинамических гравитационных волн. При $H_0 = 0$ получаем, как и следовало ожидать, обычный закон дисперсии $\omega = \sqrt{kg}$.

Из (21) следует, что в магнитном поле невозможно распространение гравитационных волн произвольной длины. В самом деле, из (21) и условия $\omega^2 > 0$ (бегущая волна с незатухающей амплитудой) имеем условие, налагаемое на $\lambda = 1/k$:

$$\lambda > H_0^2 / 4\pi\rho g. \quad (22)$$

Гравитационные волны с λ меньшим, чем $\lambda_{кр} = H_0^2 / 4\pi\rho g$, не могут распространяться по поверхности жидкости.

Рассмотрим влияние поверхностного натяжения в предположении, что поверхностное натяжение не зависит от полей, а электромагнитные натяжения, даваемые компонентами тензора $T_{\alpha\beta}$, малы по сравнению с натяжениями за счет изменения кривизны поверхности. Тогда (2) к левой части (21) достаточно просто прибавить $-\alpha k^2$, и закон дисперсии принимает вид

$$\omega^2 - \frac{\alpha k^3}{\rho} - gk = -\frac{H_0^2}{4\pi} k^2 \quad (23)$$

(здесь α — коэффициент поверхностного натяжения). Условием положительности ω^2 , как следует из (23), является

$$\alpha k^2 + g\rho - \frac{H_0^2}{4\pi} k > 0. \quad (24)$$

Из (24) видно, что в полях столь слабых, что

$$H_0^2 < 8\pi\sqrt{\alpha g\rho}, \quad (25)$$

возможны волны любой длины с законом дисперсии (23). Если же имеет место неравенство, обратное (25), то условие (24) соблюдается лишь для $k_1 < k < k_2$, где

$$k_{1,2} = H_0^2 / 8\pi\alpha \mp \sqrt{(H_0^2 / 8\pi\alpha)^2 - g\rho/\alpha}. \quad (26)$$

Таким образом, без затухания возможно распространение лишь достаточно длинных или достаточно коротких волн, причем закон дисперсии не зависит от ориентации магнитного поля относительно оси z .

Заметим, что из (7) и (2) следует, что $\Delta h = 0$, поэтому член, содержащий магнитную вязкость ν_m , выпадает автоматически даже без предположения $\sigma = \infty$. Это означает, что для рассматриваемого типа движения учитывать магнитную вязкость следует только вместе с учетом гидродинамической вязкости или в следующих приближениях по a/λ . Поскольку для ртути, например, $\nu \sim 10^{-3}$ см²/сек, можно полагать $\sigma = \infty$ (т. е. $\nu_m = 0$) вплоть до весьма малых частот. Расчет затухания поверхностных волн в обратном предельном случае проделан в работе (3).

Мы не будем здесь рассматривать вопрос о том, как происходит затухание волн, длины которых лежат в недозволенной области. Заметим лишь, что при приближении λ к $\lambda_{кр}$ ω стремится к 0, движение характеризуется числом Рейнольдса $Re < 1$, и нельзя уже считать жидкость идеальной и проводимость ее бесконечной.

Полученные результаты имеют наглядное физическое истолкование. Поскольку при условии $\sigma = \infty$ каждая жидкая частица в волне жестко связана с определенной силовой линией магнитного поля и в то же время описывает окружность радиуса $\sim a$, волновое движение приводит к возникновению поля h , искривляющего соответствующим образом силовые линии внешнего магнитного поля H_0 . Волновое кругообразное движение частиц проникает в глубь жидкости на расстояния $\sim \lambda$, поэтому $h \sim \frac{a}{\lambda} H_0$, а энергия возникающего дополнительного магнитного поля на единицу длины фронта волны порядка $h^2 \lambda \sim \frac{a^2}{\lambda} H_0^2$. Механическая энергия волны на единицу фронта порядка $\rho v^2 \lambda \sim \rho a^2 \omega^2 \lambda$, если учесть, что $v \sim a\omega$. Но для существования волн необходимо, чтобы жидкие частицы могли описать полную окружность, т. е. механической энергии хватило на создание соответствующего поля h . Отсюда получаем $\frac{a^2}{\lambda} H_0^2 < \rho a^2 \omega^2 \lambda$ или

$$H_0^2 / \rho < \omega^2 / k^2. \quad (27)$$

Подставив сюда $\omega = \sqrt{gk}$, получим ограничение типа (22) на допустимую длину гравитационных волн. Из (27) также следует, что в соответствии с (26) распространение достаточно коротких волн возможно всегда, поскольку для капиллярных волн $\omega^2 = \alpha k^3 / \rho$.

Из сказанного ясно, что качественные результаты работы не связаны с ориентацией внешнего магнитного поля. Этот вывод подтверждается прямым расчетом. Так, в работе (4) показано, что продольное внешнее магнитное поле также оказывает на поверхностные возмущения стабилизирующее действие. В (5) непосредственно наблюдалось гашение поверхностных волн внешним магнитным полем, перпендикулярным невозмущенной поверхности жидкости.

Институт электрохимии
Академии наук СССР

Поступило
15 XII 1961

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Механика сплошных сред, М., 1954.
² С. И. Сыроватский, Усп. физ. наук, **62**, в. 3, 247 (1957). ³ С. И. Брагинский, ЖЭТФ, **33**, в. 5 (11), 1417 (1959). ⁴ А. В. Кисловский, Вестн. Моск. унив., Матем., мех., астроном., № 6, 99 (1957). ⁵ В. Lehnert, Ark. f. Fys., **5**, 69 (1952).