Доклады Академии наук СССР
1962. Том 147, № 4

ГЕОФИЗИКА

Член-корреспондент АН СССР В. Г. ЛЕВИЧ, А. М. ГОЛОВИН

ТЕОРИЯ ЛИВНЕВОГО ДОЖДЯ

Основные закономерности образования осадков можно выявить при помощи модели облака с постоянным восходящим потоком, впервые использованной Я. И. Френкелем и Н. С. Шишкиным ([1]). Изучение роста капель с учетом гравитационной коагуляции и конденсации, при допущении о постоянстве пересыщения в облаке было выполнено Н. С. Шишкиным ([2]). Численный расчет Хауэлла ([3]) изменения пересыщения с высотой без учета коагуляции капель показывает на весьма существенную зависимость пересыщения от высоты. В настоящей работе исследуется пересыщение с учетом коагуляции капель.

В отсутствие конденсации изменение пересыщения c с высотой z, отсчитываемой от основания облака для $z \lesssim 2\cdot 10^5$ см, следует считать

$$c(z) = Cz \qquad (C \approx 2\cdot 10^{-11}\cdot \text{г/см}^4), \tag{1}$$

поскольку с высотой падает температура, а, следовательно, и давление насыщенного пара, которое в соответствии с уравнением Клапейрона—Клаузиуса меняется быстрее, чем атмосферное давление, описываемое барометрической формулой.

При наличии конденсации изменение пересыщения на пути dz будет меньше рассчитанного без учета конденсации на величину сконденсировавшейся влаги за время $dt = dz/w$ (w — скорость восходящего потока воздуха):

$$\frac{dc}{dz} = \rho \int\limits_0^\infty n(v, z) \left(\frac{dv}{dt}\right)_{\text{конд}} \frac{dv}{w} = C, \tag{2}$$

где $n(v, z)$ — число капель объема v на высоте $z = wt$. При этом допускается, что скорость свободного падения капель много меньше w.

Скорость конденсационного роста описывается формулой Максвелла:

$$\rho \left(\frac{dv}{dt}\right)_{\text{конд}} = 4\pi D c v^{1/3}, \tag{3}$$

где ρ — плотность воды, $D \approx 0{,}1$ см^2/сек. — эффективный коэффициент диффузии, учитывающий замедление конденсации благодаря повышению температуры капли.

Подставляя формулу (3) в уравнение (2), получим

$$\frac{dc}{dz} + \frac{4\pi D}{w} c \int\limits_0^\infty n(v, z)\, v^{1/3} dv = C. \tag{4}$$

Поскольку конденсационный рост капель существенен в основном для малых высот, когда спектр близок к монодисперсному, то можно заменить

$$\int\limits_0^\infty n(v, z)\, v^{1/3} dv \approx N(z)\, [V(z) / N_0]^{1/3}, \tag{5}$$

где $N(z)$ — полное число капель в единице объема на высоте z, $N_0 = N(0)$, $V(z)$ — водность, т. е. содержание воды в каплях на высоте z.

При вероятности столкновения капель объемов u и v, равной $b(u+v)$, где $b = \mathrm{const}$,

$$N(z) = N_0 \exp\left\{-b/w \int_0^z V(z)\,dz\right\}. \tag{6}$$

Но в силу того, что

$$\rho V(z) = Cz - c \tag{7}$$

для определения водности, а вместе с тем и пересыщения, нам требуется найти решение следующего уравнения:

$$\rho \frac{dV}{dz} = \frac{4\pi D}{w}(Cz - \rho V)\, N_0^{2/3} V^{1/3} \exp\left\{-\frac{b}{w}\int_0^z V dz\right\}. \tag{8}$$

Очевидно, что при $z \to 0$

$$V(z) \approx \left(\frac{4\pi DC}{3w\rho}\right)^{3/2} N_0 z^3 \tag{9}$$

и соответственно пересыщение будет определяться формулой (7).

В отсутствие коагуляции (т. е. при $b = 0$) легко найти асимптотическое поведение решения уравнения (7) при больших z:

$$\rho V(z) \approx Cz - w\rho^{1/3}/4\pi D\,(C/N_0)^{2/3} z^{-1/3}. \tag{10}$$

Сравнение с результатами численного расчета, выполненного Хауэллом ([3]), показывает, что изменение пересыщения с высотой вполне удовлетворительно описывается при $z < z_1$ — формулами (7) и (9), а при $z > z_1$ — (7) и (10). При $N_0 = 100$ см$^{-3}$, $w = 600$ см/сек и выбранных ранее значениях C и D $z_1 \approx 5 \cdot 10^3$ см.

Учет коагуляции изменит поведение пересыщения при больших значениях z. Будем считать, что в этой области $c \ll Cz$. Тогда для определения пересыщения в этой области имеем следующее линейное уравнение:

$$dc/dz + kz^{1/3} e^{-\lambda z^2} c = C, \tag{11}$$

где

$$k = 4\pi D N_0^{2/3} C^{1/3} w^{-1}, \quad \lambda = bC/2w\rho.$$

Так как при $C = 0$ должно быть $c \equiv 0$, то нужно выбрать частное решение:

$$c(z) = C \int_0^z \exp\left\{-k \int_x^z t^{1/3} e^{-\lambda t^2} dt\right\} dx. \tag{12}$$

Приближенное вычисление последнего интеграла с погрешностью, не превышающей 20%, на интервале $5 \cdot 10^4$ см $< z < 2 \cdot 10^5$ см дает

$$c(z) \approx Cz\sqrt{\pi} e^{h^2} \operatorname{erfc} h \left[4h\left(\lambda z^2 - \frac{1}{6}\right)\right]^{-1}, \tag{13}$$

где

$$4h^2(\lambda z^2 - 1/6) = kz^{4/3} e^{-\lambda z^2}. \tag{14}$$

Из полученных результатов следует, что уменьшение числа капель в восходящем потоке в результате коагуляции приводит к росту пересыщения с высотой, и при $z \approx 2$ км $V(z)$ достигает своего предельного значения, равного $\sim 3 \cdot 10^{-6}$. При вычислении роста капель для $z > z_2$ можно не учитывать влияния конденсации.

Дальнейший рост поднимающейся капли, радиус которой $r(t)$ соответствует среднему объему капель на высоте $z > z_2$, может быть вычислен по формуле

$$r(t) = r(z_2) \exp\{0{,}33\, bV_2 (t - t_2)\}, \tag{15}$$

где V_2 — общий объем жидкой фазы в 1 см^3 на высоте z_2, $b = 6\cdot 10^3$ сек$^{-1}$, $t - t_2$ — время подъема капли от высоты z_2 до высоты z.

Рост падающей капли определяется, в основном, столкновениями с каплями восходящего потока. Если считать скорость падения крупной капли радиуса R равной $\Omega\sqrt{R}$, где $\Omega \approx 2\cdot 10^3$ см$^{1/2}$/сек, то уравнение для изменения R будет иметь вид

$$4R^2\frac{dR}{dt} = \Omega\int\limits_0^{\frac{4}{3}\pi R^3} (R+r)^2(\sqrt{R}-\sqrt{r})\, n(v,t')\, v dv, \tag{16}$$

где $n(v, t')$ — число капель объема v в момент времени t', прошедший с начала подъема капель от основания облака до высоты, на которую опустилась в момент t капля радиуса R.

Заметим, что это уравнение оправдано лишь при $R \gg r$, так как не учитывается торможение капли за счет получения импульса от капель восходящего потока. Но при $R \gg r$ уравнение (16) существенно упрощается:

$$\Omega\sqrt{R}V_2 = 4dR/dt. \tag{17}$$

Решение этого уравнения очевидно:

$$R(t) = \left[\frac{w}{\Omega} + \frac{\Omega V_2}{8}(t - t_h)\right]^2, \tag{18}$$

где t_h — момент начала опускания капли.

Теоретические оценки $R_m \sim 0{,}3$ см радиуса капли, дробящейся в турбулентном потоке восходящего воздуха с образованием большого числа более мелких капель со средним радиусом $r_k \sim 0{,}01$ см, были представлены в работе В. Г. Левича ([4]). Если деление крупных капель происходит на той же высоте, где радиус капель, соответствующий среднему объему, равен r_k, то возможно образование цепного процесса, предсказанного Лэнгмюром.

Поскольку скорость капли можно считать равной

$$\dot{z} = w - \Omega\sqrt{r}, \tag{19}$$

то воспользовавшись формулой (15), можно вычислить на какую высоту поднимается капля за время роста ее радиуса от r_k до r_h, а также на какую высоту опустится капля в соответствии с формулами (18) и (19) при росте капли от радиуса r_h до R_m. Отсюда получаем уравнение, которому должна удовлетворять скорость восходящего потока воздуха для образования цепного процесса:

$$2b(\sqrt{R_m} - w/\Omega)^2 = 3w(\ln w/\Omega\sqrt{r_k} - 1) + 3\Omega\sqrt{r_k}. \tag{20}$$

При $R_m = 0{,}3$ см и $r_k = 0{,}01$ см получим $w = 600$ см/сек. При $V = 3\cdot 10^{-6}$ получим размеры цикла $z_h - z_m \approx 1$ км, период цикла около 700 сек.

Пусть N_k — первоначальное число капель радиуса r_k в единице объема на высоте, где происходит разрыв крупных капель. Пусть f — вероятность сохранения воды, содержащейся в капле в цикле, тогда число падающих капель в конце n-го цикла будет

$$N_n = N_k f\frac{1-f^n}{1-f}\left(\frac{r_k}{r_h}\right)^3. \tag{21}$$

Критерием дождевания, т. е. выпадания ливня из облака, служит равенство динамического напора, создаваемого падающими каплями, динамическому напору восходящего потока воздуха плотности ρ_0:

$$N_k f\frac{1-f^n}{1-f}\left(\frac{r_k}{r_n}\right)^3 \rho\Omega^2 R_m \approx \rho_0 w^2. \tag{22}$$

Отсюда, при известном значении можно оценить число необходимых циклов для образования ливня.

При $R_m = 0{,}3$ см, $r_k = 0{,}01$ см, $w = 600$ см/сек ливень возможен лишь при $f \geqslant 0{,}25$. Поскольку для образования ливня может потребоваться завершение нескольких циклов, необходимо рассмотреть вопрос об их устойчивости, т. е. о возможности ухода влаги из цикла.

Пусть две капли одинакового радиуса образовались на высотах, разность которых равна Δz. Коагуляционный рост каждой из капель может быть выражен по формуле

$$\left(\frac{dv}{dz}\right)_{\text{коаг}} \simeq bv \int_0^v n(u, z)\, u du. \tag{23}$$

Очевидно, что с ростом z уменьшается из-за коагуляции объем влаги, заключенной в относительно мелких каплях, что создает впечатление об абсолютно неустойчивом цикле, поскольку для дорастания до r_h более высокой капли в этом случае предстоит пройти больший путь. Однако нижерасположенная капля получает за 1 сек. при коагуляции избыточный импульс по сравнению с верхней каплей. С учетом формулы (27) получим следующее уравнение движения:

$$\ddot{z} + b\dot{z} \int_0^v n(v', z)\, v' dv' \approx 2 \cdot 10^{-4} r^{-1} (w - \dot{z})^2 - g +$$

$$+ b \int_0^v n(v', z)\, v' (w - \Omega \sqrt{r'})\, dv'. \tag{24}$$

Аналогичное уравнение справедливо для капли того же объема на высоте $z + \Delta z$. Считая Δz малым, приходим к следующему уравнению для определения Δz:

$$\frac{d^2}{dt^2} \Delta z + \left[4 \cdot 10^{-4} r^{-1} (w - \dot{z}) + b \int_0^v n v' dv'\right] \frac{d}{dt} \Delta z +$$

$$+ b \int_0^v \left(-\frac{\partial n}{\partial z}\right) v' (w - \dot{z} - \Omega \sqrt{r'})\, dv' \Delta z = 0. \tag{25}$$

Исследование на устойчивость тривиального решения дифференциального уравнения

$$y''(t) + p(t)\, y'(t) + q^2(t)\, y(t) = 0 \tag{26}$$

заменой переменной $x = \int_0^t q(t)\, dt$ сводится к исследованию на устойчивость тривиального решения дифференциального уравнения, для которого, как известно ([5]) из анализа эквивалентной системы дифференциальных уравнений первого порядка, необходимо потребовать для обеспечения устойчивости решения выполнения неравенства

$$p(t) + \frac{1}{2} d/dt \ln q^2(t) \geqslant 0. \tag{27}$$

Приближенные оценки показывают, что применительно к уравнению (25) это неравенство удовлетворяется.

Институт электрохимии
Академии наук СССР

Поступило
16 VI 1962

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Я. И. Френкель, Н. С. Шишкин, Изв. АН СССР, сер. геогр. и геофиз., 10, 301 (1946). [2] Н. С. Шишкин, Облака, осадки и грозовое электричество, М., 1954, гл. 6 и 8. [3] W. Howell, J. Meteorol., 6, № 2, 134 (1949); А. Х. Хргиан, Физика атмосферы, 1958, стр. 303. [4] В. Г. Левич, Физико-химическая гидродинамика, М., 1959, § 86, 89. [5] Л. Э. Эльсгольц, Дифференциальные уравнения, М., 1957, стр. 199.