

ДВИЖЕНИЕ ГАЗОВЫХ ПУЗЫРЬКОВ ПРИ БОЛЬШИХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА

В. Г. Левич

Рассматривается теория пограничного слоя на границе раздела жидкость — газ. Результат применяется к расчету силы сопротивления, действующей на газовый пузырек, поднимающийся в жидкости; эта сила оказывается пропорциональной первой степени скорости при $Re \gg 1$. Показано, что характер обтекания пузырька существенно отличается от обтекания твердой сферы. Теория удовлетворительно согласуется со специально произведенными измерениями.

Движение газовых пузырьков неоднократно исследовалось экспериментально, главным образом, в связи с интересами химической технологии. Теоретический расчет скорости подъема газового пузырька был дан в работах Рыбчинского [1] и Адамара [2], где он получался как частный случай закона движения капли жидкости в жидкой среде. Позднее этому же вопросу была посвящена теоретическая работа Бонда [3]. Вопрос о влиянии поверхностно-активных веществ на движение пузырька или капли был затронут автором [4], но детально рассмотрен в работе А. Н. Фрумкина и автора [5], где была разработана полная теория эффектов, связанных с наличием поверхностно-активных веществ, растворенных в жидкой среде. Выводы теории хорошо подтвердились в экспериментальной работе Т. Крюковой [6].

Во всех указанных работах числа Рейнольдса являлись малыми по сравнению с единицей, так что режим движения был вязким. В этой работе будет развита теория движения пузырька при больших по сравнению с единицей числах Рейнольдса.

До настоящего времени в гидродинамической литературе не делалось попыток построения теории пограничного слоя, возникающего на границе раздела жидкость — газ при больших числах Рейнольдса. Между тем, как будет показано ниже, пограничный слой на этой границе существенно отличается от обычного прандтлевского пограничного слоя у поверхности твердого тела. Поэтому движение жидкости у поверхности газового пузырька оказывается отличным от движения у поверхности твердой сферы, обтекаемой жидкостью.

Отличие условий течения вблизи границы жидкость — газ от границы с твердой стенкой состоит в том, что на последней обращается в нуль скорость жидкости, тогда как на границе с газом — лишь касательная слагающая тензора напряжений. В потоке идеальной жидкости указанное граничное условие не может быть выполнено. Поэтому вблизи поверхности пузырька должен существовать тонкий пограничный слой вязкого течения. Отличие его от пограничного слоя у твердой поверхности состоит в ином характере распределения скоростей.

Граничное условие на поверхности пузырька накладывает ограничения лишь на производные скорости, но не на самую скорость. Поэтому мы можем считать, что скорость жидкости у поверхности пузырька мало отличается от скорости в основном потоке. Иными словами,

малое отличие условий течения на поверхности пузырька от течения в толще жидкости позволяет представить скорость вблизи поверхности пузырька в виде:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}', \quad (1)$$

где $\mathbf{v}_0$ — скорость течения идеальной жидкости вне пограничного слоя и $\mathbf{v}'$ — малое изменение скорости внутри пограничного слоя.

Уравнения гидродинамики можно записать в виде:

$$(\mathbf{v} \text{ grad}) \mathbf{v} = -\rho^{-1} \text{grad } p + \nu \Delta \mathbf{v}, \quad (2)$$

$$\text{div } \mathbf{v} = 0, \quad (3)$$

или, подставляя сюда выражение (1) и пренебрегая членом $(\mathbf{v}' \text{ grad}) \mathbf{v}'$ как малым высшего порядка:

$$\begin{aligned} & (\mathbf{v}_0 \text{ grad}) \mathbf{v}_0 + (\mathbf{v}_0 \text{ grad}) \mathbf{v}' + (\mathbf{v}' \text{ grad}) \mathbf{v}_0 = \\ & = -\rho^{-1} \text{grad } p - \rho^{-1} \text{grad } p' + \nu \Delta \mathbf{v}_0 + \nu \Delta \mathbf{v}', \end{aligned} \quad (4)$$

$$\text{div } (\mathbf{v}' + \mathbf{v}_0) = 0, \quad (5)$$

где p' — изменение давления в пограничном слое.

В уравнениях (4) и (5) можно опустить ряд членов в силу того, что $\mathbf{v}_0$ — скорость течения идеальной жидкости, так что $\Delta \mathbf{v}_0 = 0$, а $(\mathbf{v}_0 \text{ grad}) \mathbf{v}_0 = -\rho^{-1} \text{grad } p_0$; поэтому, его можно переписать в виде:

$$(\mathbf{v}_0 \text{ grad}) \mathbf{v}' + (\mathbf{v}' \text{ grad}) \mathbf{v}_0 = -\rho^{-1} \text{grad } p' + \nu \Delta \mathbf{v}'. \quad (6)$$

По тем же причинам (5) можно написать как:

$$\text{div } \mathbf{v}' = 0, \quad (7)$$

$$\text{div } \mathbf{v}_0 = 0. \quad (8)$$

Толщину пограничного слоя можно считать малой по сравнению с радиусом пузырька. Поэтому, пренебрегая кривизной и вводя прямоугольные координаты x и y , отсчитываемые вдоль поверхности пузырька и по нормали к ней, и обозначая через u_0 , u' и v_0 , v' проекции скоростей на оси x и y , можно переписать (6) и (7) в проекциях в виде:

$$u_0 \frac{\partial u'}{\partial x} + v_0 \frac{\partial u'}{\partial y} + u' \frac{\partial u_0}{\partial x} + v' \frac{\partial u_0}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u'}{\partial y^2}; \quad (9)$$

$$u_0 \frac{\partial v'}{\partial x} + v_0 \frac{\partial v'}{\partial y} + u' \frac{\partial v_0}{\partial x} + v' \frac{\partial v_0}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial y} + \nu \frac{\partial^2 v'}{\partial y^2}; \quad (10)$$

$$\partial u' / \partial x + \partial v' / \partial y = 0. \quad (11)$$

Граничное условие на поверхности пузырька можно написать в виде: $\partial u / \partial y = 0$ или, подставляя $u = u_0 + u'$:

$$\partial u' / \partial y + \partial u_0 / \partial y = 0. \quad (12)$$

Граничное условие, налагаемое на u' при больших значениях y , гласит:

$$u' \rightarrow 0 \text{ при } y \rightarrow \infty. \quad (13)$$

Оценим по порядку величины все члены, входящие в (9) — (11).

Из (11) следует, что

$$v' = -\int (\partial u' / \partial x) dy, \quad (14)$$

тогда как (8) дает

$$v_0 = -\int (\partial u_0 / \partial x) dy; \quad (15)$$

поэтому в (9) можно опустить член $v' \partial u_0 / \partial y$, как малый по сравнению с членом $v_0 \partial v' / \partial y$.

Оценка членов уравнения (10) показывает, что все они являются величинами второго порядка, так что (10) дает

$$\partial p' / \partial y = 0. \quad (16)$$

Последнее означает, что в рассматриваемом пограничном слое, как и в обычном пограничном слое Прандтля, давление поперек слоя постоянно. Поскольку, однако, на границе $p' = 0$, мы имеем вместо (9)

$$u_0 \partial u' / \partial x + v_0 \partial u' / \partial y + u' \partial u_0 / \partial x = \nu \partial^2 u' / \partial y^2 \quad (17)$$

или, подставляя v_0 из (15), находим, окончательно

$$u' \partial u_0 / \partial x + u_0 \partial u' / \partial x - \left(\int (\partial u_0 / \partial x) dy \right) \partial u' / \partial y = \nu \partial^2 u' / \partial y^2.$$

Скорость течения во внешнем потоке u_0 (т. е. скорость течения идеальной жидкости, обтекающей шар) равна, как известно [7],

$$u_0 = u_\infty [1 + (R^3/2r^3)] \sin \theta.$$

Положим $r = R + y$, где R — радиус пузырька. Внутри пограничного слоя, толщина которого мала по сравнению с R , имеем

$$u_0 \cong \frac{3}{2} u_\infty (1 - y/R) \sin \theta. \quad (18)$$

Подставляя значение u_0 из (18) в (17) и используя (15), получаем

$$\frac{3u_\infty}{2R} u' \cos \theta + \frac{3u_\infty \sin \theta}{2R} \frac{\partial u'}{\partial \theta} - \frac{3u_\infty \cos \theta}{2R} \frac{\partial u'}{\partial y} y = \nu \frac{\partial^2 u'}{\partial y^2}. \quad (19)$$

С помощью (19) можно оценить толщину пограничного слоя δ , именно:

$$\nu (\partial^2 u' / \partial y^2) \cong \nu u' / \delta^2$$

или

$$\nu u' / \delta^2 \cong u_\infty u' / R, \quad (20)$$

так что $\delta = (\nu R / u_\infty)^{1/2}$. Толщина пограничного слоя мала по сравнению с радиусом при $Re \gg 1$.

Граничное условие (12) после подстановки u_0 из (18) приобретает вид:

$$\partial u' / \partial y = (3u_\infty / 2R) \sin \theta \quad \text{при } y = 0. \quad (21)$$

Для нахождения решения уравнения (19) при условии (21) введем новую неизвестную функцию: $f = u' \sin \theta$. Тогда уравнение (19) приобретает вид:

$$\sin \theta \cdot \partial f / \partial \theta - \cos \theta \cdot y \partial f / \partial y = k \partial^2 f / \partial y^2, \quad (22)$$

где через k обозначена величина

$$k = 2R\nu / 3u_\infty. \quad (23)$$

Граничное условие (21) переходит в условие

$$(\partial f / \partial y)_{y=0} = (3u_\infty / 2R) \sin^2 \theta. \quad (24)$$

Для интегрирования уравнения (22) вводим новую переменную

$$\psi = y \sin \theta \quad (25)$$

и получаем

$$\partial f / \partial \theta = k \sin \theta (\partial^2 f / \partial \psi^2). \quad (26)$$

Соответственно из (24) получаем

$$(\partial f / \partial \psi)_{\psi=0} = (3u_\infty / 2R) \sin \theta. \quad (27)$$

В уравнении (26) удобно ввести вместо θ новую переменную $t = 1 - \cos \theta$. Тогда находим

$$\partial f / \partial t = k (\partial^2 f / \partial \psi^2)$$

и

$$(\partial f / \partial \psi)_{\psi=0} = (3u_{\infty} / 2k) \sqrt{1 - (t-1)^2}. \quad (28)$$

Условие на бесконечности запишется в виде:

$$f \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \psi \rightarrow \infty. \quad (29)$$

Кроме того, условие симметрии задачи требует, чтобы

$$f = 0 \quad \text{при} \quad t = 0. \quad (30)$$

Последнее означает, что в точке $\theta = 0$ скорость $u' \neq \infty$. Решением уравнения (26), удовлетворяющим условиям (27)–(30), является

$$f = \frac{3u_{\infty} \sqrt{k}}{4 \sqrt{\pi} R} \int_0^t \left[\frac{1 - (t-1)^2}{t-z} \right]^{1/2} \exp \left[-\frac{\psi^2}{4k(t-z)} \right] dz. \quad (31)$$

Поэтому поправка к скорости u' имеет вид:

$$u'(\psi, \theta) = \frac{3}{4 \sin \theta} \left(\frac{3u_{\infty} \nu}{2\pi R} \right)^{1/2} \int_0^{1-\cos \theta} \frac{\sin \theta}{(1 - \cos \theta - z)^{1/2}} \exp \left[-\frac{\psi^2}{4k(1 - \cos \theta)} \right] dz. \quad (32)$$

В частности, на поверхности пузырька $\psi = 0$:

$$u'(0, \theta) = \frac{3}{4 \sin \theta} \left(\frac{3u_{\infty} \nu}{2\pi R} \right)^{1/2} \int_0^{1-\cos \theta} \frac{\sin \theta dz}{(1 - \cos \theta - z)^{1/2}}. \quad (33)$$

До тех пор пока $u'(0, \theta)$ мало по сравнению со скоростью основного потока u_{∞} , происходит безотрывное обтекание пузырька.

Из (33) ясно, что выражение для u' расходится при значениях θ , близких к π . Действительно, интеграл при $\theta \rightarrow \pi$ стремится к конечному пределу, так что

$$u' \sim (u_{\infty} \nu / R)^{1/2} / (\pi - \theta)$$

и $u' \rightarrow \infty$ при $\theta \rightarrow \pi$. Фактически это означает, что при $\theta \rightarrow \pi$ наше исходное предположение о малости u' по сравнению с u_0 уже не выполняется. В области $u' \sim u_0$ наступает турбулентное течение в пограничном слое (отрыв).

Для рассмотрения явления отрыва можно воспользоваться методом, развитым Ландау [8]. Заметим, прежде всего, что в той же точке, где u' неограниченно возрастает, вместе с ним неограниченно возрастает и v' . Это значит, что течение отклоняется от поверхности раздела и уходит в глубь жидкости. Обычные условия отрыва, которые имеют место на поверхности твердого тела, неприменимы к жидкой поверхности, так как на ней равенство $du/dy = 0$ выполнено автоматически на всей поверхности. Используя метод Ландау, можно написать условия отрыва на жидкой поверхности в виде

$$du/dy = 0, \quad du^2/dy^2 = 0.$$

Ясно, однако, что угол θ , при котором u' становится порядка u_{∞} ,

$$\theta_1 = (\pi - \theta) \sim (\text{Re})^{-1/2} \ll 1. \quad (34)$$

Поэтому подавляюще большая часть площади пузырька занята безотрывным течением. Вдоль поверхности капли, от $\theta = 0$ до $\theta = \theta_1$, распределение скоростей течения жидкости мало отличается от распределения скоростей в потоке идеальной жидкости, обтекающей непроницаемую сферу.

Картина обтекания пузырька, а следовательно, и закон сопротивления существенно отличаются от обтекания твердого шара. В последнем случае область отрыва занимает почти всю кормовую часть шара при числах Рейнольдса порядка нескольких сотен и значительную ее часть при меньших числах Рейнольдса (но все же больших единицы).

В случае пузырька ширина области отрыва не превышает 20 и, следовательно, захватывает очень узкую область у кильватера пузырька. В этой области происходит турбулентное движение жидкости. Скорости турбулентного течения малы по сравнению со скоростями основного течения, поскольку область турбулентного движения является весьма узкой. Можно предположить, что по порядку величины пульсационные скорости в области размером порядка $R\theta_1$ будут

$$u_{\text{турб}} \sim u_0 R \theta_1 / R \sim u_0 \theta_1. \quad (35)$$

Полная сила, действующая на всю поверхность пузырька, складывается из двух частей: силы сопротивления, действующей на поверхность пузырька до места отрыва, и силы, действующей в области турбулентного обтекания. В первой области сила сопротивления имеет вязкий характер. Для нахождения ее проще всего вычислить диссипируемую энергию.

Согласно известной формуле, диссипируемая энергия $2F$ равна [9]

$$2F = \mu \int (\text{rot } \mathbf{v})^2 dV + \mu \int \frac{\partial(\mathbf{v})^2}{\partial n} dS + 2\mu \int [\mathbf{v} \text{ rot } \mathbf{v}] dS, \quad (36)$$

где $\mathbf{n}$ — направление внешней нормали к обтекаемой поверхности и μ — вязкость. Согласно (1), $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}'$. В области вязкого обтекания $\mathbf{v}' \ll \mathbf{v}_0$ и им можно пренебречь при подстановке в (36). Скорость невозмущенного потока является безвихревой, так что формула (36) существенно упростится и перейдет в следующую:

$$2F = \mu \int \left[\frac{\partial}{\partial r} (u_0^2 + v_0^2) \right]_{r=R} 2\pi R^2 \sin \theta d\theta = -12\pi\mu R u_\infty^2. \quad (37)$$

При этом мы подставили значение u_0 из (18) и v_0 из (15) и использовали равенство $(v_0 \partial v_0 / \partial r)_{r=R} = 0$. Диссипативная сила, действующая на пузырек:

$$f = -\partial F / \partial u_\infty = 12\pi\mu R u_\infty. \quad (38)$$

Мы видим, что эта сила отличается от силы, действующей на твердый шар при малых числах Рейнольдса, лишь множителем 2. Что же касается силы сопротивления, возникающей от действия турбулентного хвоста, то по порядку величины она равна $f_1 \sim \frac{1}{2} \rho u_{\text{турб}}^2 S_1$, где S_1 — площадь покрытия турбулентным хвостом, $S_1 \sim R^2 \theta_1^2$. Поэтому, подставляя $u_{\text{турб}}$ из (35), имеем

$$f_1 \sim \rho R^2 \theta_1^2 u_{\text{турб}}^2 \sim \rho R^2 u_\infty^2 \theta_1^4.$$

Заменяя θ_1 его значением из (32), находим

$$f_1 \sim \rho R^2 u_\infty^2 (\text{Re})^{-2}. \quad (39)$$

Эта сила мала по сравнению с диссипативной силой, если только $12\pi \gg 1/\text{Re}$. Таким образом сопротивление, испытываемое пузырьком при числах Рейнольдса $\text{Re} \gg 1$, имеет, в основном, диссипативный характер и пропорционально вязкости жидкости и первой степени скорости.

Скорость подъема газового пузырька может быть найдена из ус-

ловий равенства подъемной силы в поле тяжести силе сопротивления (39); это дает

$$u_{\infty} = \rho R^2 g / 9\mu, \quad (40)$$

где g — ускорение силы тяжести.

Описанная картина распределения фактически может иметь место только тогда, когда поверхность пузырька свободна от поверхностно-активных веществ. Влияние последних на движение пузырька должно быть весьма резко выраженным. Действительно, достаточно, чтобы на поверхности пузырька было адсорбировано количество поверхностно-активных веществ, требующееся для покрытия концентрированной пленкой сравнительно небольшой части поверхности капли, и условие (12) станет не пригодным. Вместо него нужно написать условие компенсации вязких напряжений и напряжений, возникающих в адсорбционной пленке [5].

При этом все поверхностно-активное вещество будет сноситься в кормовую часть пузырька до тех пор, пока не образуется пленка, которая полностью затормозит тангенциальное движение жидкости на части поверхности. Как только движение в кормовой части пузырька будет заторможено, здесь образуются точно такие же условия, как и на поверхности твердой сферы. В результате этого возникает явление отрыва, и движение пузырька будет происходить так, как если бы он был твердым.

Прежде чем перейти к сравнению теории с экспериментальными данными, укажем на существующие серьезные ограничения, возникающие при применении теории к фактическому движению газовых пузырьков. Именно, во всей предыдущей теории пузырек считался недеформирующимся при подъеме его в жидкой среде. Фактически, однако, он остается недеформированным только при выполнении неравенства: $2\sigma/R \gg f/S$, где $2\sigma/R$ есть капиллярное давление, а f/S — сила сопротивления, действующая на 1 см^2 поверхности пузырька. Выражая силу f через подъемную силу, действующую на пузырек, можно переписать это неравенство в обычном виде $R \ll R_{\text{кр}}$, где $R_{\text{кр}} = (2\sigma/\rho g)^{1/2}$ — капиллярная постоянная. При радиусах пузырька, сравнимых с капиллярной постоянной данной жидкости, пузырек начинает деформироваться, приобретая форму диска.

У края диска будет происходить отрыв, в результате чего закон сопротивления изменится и станет идентичным с законом сопротивления твердого шара. Это ограничение размеров пузырька приводит к соответствующему ограничению чисел Рейнольдса значениями 1000—1500 и, обычно, составляет около 500. При таких, сравнительно еще небольших числах Рейнольдса, положенное нами в основу рассмотрения требование $Re \gg 1$ оказывается на границе выполнимости.

Кроме того, невозможность изменять радиус пузырька в широких пределах ограничивает возможности экспериментальной проверки формулы (38). По этой же причине затруднена проверка зависимости скорости от вязкости: в неводной среде с большим μ значение σ существенно меньше, чем в воде. Поэтому диапазон возможных радиусов в неводной среде еще более сужен.

Переходя к сравнению с экспериментом, следует указать, что в имеющихся экспериментальных работах не содержится никаких указаний на различие в скорости движения газового пузырька и твердого шарика. Так, например, в известных опытах Аллена [10] были найдены значения коэффициента сопротивления при подъеме пузырьков в воде и при падении круглых стальных шариков. Результаты обеих серий измерений нанесены на одну кривую. Аналогичные результаты

получены и в других работах [11]. В диссертации Шебалина [12] отмечена деформация пузырьков, если их радиус превышал 1,5 мм, и резкое возрастание сопротивления при наступлении деформации.

После проведения настоящих расчетов, А. В. Городецкой в лаборатории А. Н. Фрумкина были поставлены специальные измерения для проверки основных выводов теории. Проведенные измерения носят предварительный характер. Однако уже сейчас получены существенные результаты, говорящие в пользу теории. Измерения скорости подъема пузырьков в цилиндрической трубке, наполненной простой водой подтвердили результаты более ранних работ.

При заполнении трубки дистиллированной водой скорости движения пузырька оказались уже существенно выше, чем скорости (после соответствующего пересчета) твердых шариков, бросавшихся в контрольных опытах. Применение дважды дистиллированной воды привело к дальнейшему, очень заметному росту скорости подъема пузырька. Наблюдавшиеся скорости, хотя и оставались меньше вычисленных по формуле (40), но отличались от них всего на 15–20%. При этом сопротивление движению твердой сферы, пропорциональное в этой области чисел Рейнольдса скорости в степени $3/2$ (поэмпирической формуле Аллена), оказывалось примерно в 2–3 раза большим, чем у пузырьков. Работа по детальной проверке формулы (40) продолжается.

В заключение считаю приятным долгом поблагодарить акад. Л. Д. Ландау и акад. А. Н. Фрумкина за интересные обсуждения результатов этой работы.

Институт физической химии
Академии Наук СССР

Поступила в редакцию
12 марта 1948 г.

Литература

- [1] P. Rybczynski. Bull. Acad. Sci. de Cracovie, **40**, 1911. — [2] J. Hadamard. C. R., **152**, 1735, 1911. — [3] W. Bond a. H. Newton. Phil. Mag., **5**, 794, 1928; **4**, 889, 1927. — [4] В. Левич. К теории поверхностных явлений, М., 1941. — [5] А. Фрумкин и В. Левич. Журн. физ. хим., **21**, 1183, 1947. — [6] Т. Крюкова. Журн. физ. хим., **20**, 1179, 1946; **21**, 365, 1947. — [7] Г. Ламб. Гидродинамика, ОГИЗ, 1947, стр. 749. — [8] Л. Ландау и Е. Лифшиц. Механика сплошных сред, ОГИЗ, 1944, стр. 147. — [9] Г. Ламб. Гидродинамика, ОГИЗ, 1947, стр. 727. — [10] W. Allen. Phil. Mag., **323**, 1920. — [11] F. Gibson. Phil. Mag., **952**, 1913. В. Bien a. P. Casline. Ind. Eng. Chem., **25**, 1436, 1935. — [12] Шебалин. Диссертация, Свердловск, 1942.