

С. И. КУЧАНОВ, член-корреспондент АН СССР В. Г. ЛЕВИЧ

**ДИССИПАЦИЯ ЭНЕРГИИ В ТУРБУЛЕНТНОМ ГАЗЕ,
СОДЕРЖАЩЕМ ВЗВЕШЕННЫЕ ЧАСТИЦЫ**

Рассматривается турбулентный газ при достаточно больших числах Рейнольдса, в котором взвешены твердые частицы. Относительно турбулентного потока делается предположение о его локальной однородности, изотропии и стационарности. Взвешенные частицы, рассматриваемые в данной работе, имеют размер R , достаточно малый по сравнению с внутренним масштабом турбулентности l для того, чтобы числа Рейнольдса их движения относительно газа были бы меньше единицы. Движение частиц при указанных выше условиях было нами рассмотрено в предыдущей статье ⁽¹⁾, все обозначения которой мы сохраним в данной работе.

Искомая величина ε — полная диссипация энергии в единице объема взвеси в единицу времени складывается из ε_1 — диссипации энергии, связанной взаимодействием газа и твердых частиц, и ε_0 — диссипации энергии чистого газа. Если обозначить через n среднее число частиц в единице объема, а через θ — среднюю диссипацию энергии на одной частице в единицу времени, то очевидно, что $\varepsilon_1 = n\theta$. Для вычисления величины θ , принимая во внимание, что диссипативная часть силы сопротивления движению частиц f_i дается формулой Стокса, получим соотношение

$$\theta = \overline{f_i \dot{V}_i} = k_2 \rho_0 \nu R \overline{\dot{V}_i(t) \dot{V}_i(t)} = k_2 \rho_0 \nu R S(0). \quad (1)$$

Из (1) следует, что для нахождения ε_1 необходимо знать средний квадрат скорости относительного движения частиц $S(0)$. В (1) была получена формула, позволяющая определить $S(0)$, если известна $Q(\tau)$ — лагранжева корреляционная функция газа, содержащего взвешенные частицы:

$$S(0) = (1 - \alpha)^2 \left[Q(0) - \beta \int_0^\infty Q(\tau) e^{-\beta \tau} d\tau \right]. \quad (2)$$

Если сделать предположение, что влиянием частиц на движение газа можно пренебречь (считать примесь «пассивной»), то в формулу (2) следует подставить корреляционную функцию чистого газа, не содержащего взвешенных частиц.

Для того чтобы выяснить условия применимости последнего предположения, рассмотрим более подробно характер взаимодействия частиц с турбулентной средой, в которой они взвешены. Напомним, что последующее рассмотрение не касается влияния поля тяжести, а также предполагает, что $\gamma \ll 1$, т. е. среднее расстояние между частицами много больше размеров самих частиц.

Характер взаимодействия частицы с турбулентными пульсациями разных масштабов определяется отношением частоты пульсации данного масштаба к характерной частоте β , зависящей от свойств частиц и характеристик среды, но не зависящей от структуры турбулентности. Если $\beta < \omega_L$, т. е. частица обладает достаточно большой инерционностью, то даже самые крупномасштабные пульсации практически не успевают в течение периода привести ее в движение. Такая тяжелая частица почти неподвижна и поэтому обтекается пульсациями всех масштабов. В другом

предельном случае $\beta > \omega_l$ частицу увлекают пульсации всех масштабов, и она стремится следовать за ними всеми. Если же величина β такова, что она меньше ω_l , но в то же время еще велика по сравнению с ω_L , то она будет увлекаться теми пульсациями, частоты которых малы по сравнению с β , и обтекаться пульсациями, у которых частоты велики по сравнению с β . Пульсации с частотами, близкими к β , будут частично увлекать, а частично обтекать взвешенную частицу.

Очевидно, что для того чтобы можно было пренебречь влиянием наличия частиц на движение газа, нужно, чтобы в уравнении движения газа можно было опустить член, характеризующий силу, действующую со стороны частиц на газ. Другими словами, для того чтобы можно было считать примесь «пассивной», необходимо, чтобы потеря импульса газа, обязанная частицам, была бы мала по сравнению с полной потерей импульса этого газа. Математически это означает, что должно выполняться неравенство

$$\frac{\rho_0 \dot{U}}{nf} \sim \frac{\rho_0 \dot{U}}{\rho \gamma \dot{W}} \sim \frac{\alpha}{\gamma} \frac{\dot{U}}{\dot{W}} \gg 1. \quad (3)$$

Величины $\dot{U}$ и $\dot{W}$, входящие в неравенство (3), являются ускорениями соответственно газа и частиц. Если перейти к компонентам Фурье в уравнении, связывающем скорости частиц и потока (1), то неравенство (3) примет вид

$$\frac{\alpha}{\gamma} \sqrt{\frac{\omega^2 + \beta^2}{\alpha^2 \omega^2 + \beta^2}} \gg 1. \quad (4)$$

Из условия (4) следует, что если $\alpha/\gamma \gg 1$ (масса взвешенных частиц мала по сравнению с массой потока), то примесь всегда пассивна, так как при всех ω величина $\sqrt{(\omega^2 + \beta^2) / (\alpha^2 \omega^2 + \beta^2)} \gtrsim 1$. Если же $\alpha/\gamma \sim 1$, то неравенство (4) выполняется только для достаточно высоких частот $\omega \gg \frac{\gamma}{\alpha} \sim \beta$. Таким образом, если мы рассматриваем времена много меньше $1/\beta$, то примесь можно считать «пассивной». Однако, если интересоваться поведением газа на временах, больших $1/\beta$, то пренебрегать влиянием частиц на движение газа нельзя. Это означает, что наличие в газе взвешенных частиц, масса которых сравнима с массой газа, приводит к изменению спектра крупномасштабных пульсаций и не влияет на мелкомасштабные пульсации. Действительно, так как крупномасштабные пульсации полностью увлекают частицы, то скорости частиц на больших масштабах практически равны скорости газа на этих масштабах. Другими словами, поведение взвеси газа на достаточно больших по сравнению с амплитудами относительного движения частиц масштабах и на достаточно больших по сравнению с $1/\beta$ временах можно приближенно рассматривать как однородную среду, но с макроскопическими параметрами, отличными от параметров чистого газа. В обратном предельном случае, если мы интересуемся промежутками времени, малыми по сравнению с $1/\beta$, и масштабами, малыми по сравнению с амплитудами относительного движения частиц, частицы можно рассматривать как почти неподвижные, обтекаемые мелкомасштабными пульсациями, ускорения которых много больше ускорений частиц. Потеря импульса этих пульсаций на частицах мала по сравнению с их полной потерей импульса, и поэтому наличие частиц не сказывается на пульсациях, частоты которых велики по сравнению с β . Таким образом, если рассматривать газ в течение промежутков времени, малых сравнительно с $1/\beta$, то его характеристики (в том числе и корреляционная функция) будут такими же, как и в чистом газе, не содержащем взвешенных частиц.

При рассмотрении интеграла, стоящего в формуле (2), нетрудно заметить, что основной вклад в него дают значения τ , малые по сравнению с $1/\beta$, поэтому в качестве $Q(\tau)$ можно воспользоваться корреляционной функцией чистого газа. Вид этой функции при произвольном значении времени корреляции, вообще говоря, неизвестен. Однако, так как для оп-

ределения $S(0)$ требуется знание поведения функции $Q(\tau)$ только при $\tau < 1/\beta$, то в двух важных предельных случаях эту функцию можно определить. Если значения величины τ , дающие основной вклад в интеграл формулы (2), малы по сравнению с периодами крупномасштабных пульсаций $1/\omega_L$, но все еще велики по сравнению с наименьшими периодами спектра пульсаций $1/\omega_l$, то для функции Q можно воспользоваться известным выражением (2).

$$Q(\tau) = Q(0) - k_3 \frac{\varepsilon_0}{\rho_0} \tau. \quad (5)$$

Так как $\omega_L \sim U_L/L$, $\omega_l \sim U_l/l \sim (\nu\rho_0/\varepsilon_0)^{-1/2}$, то

$$\frac{\omega_L}{\beta} \sim \frac{U_L R^2}{L \alpha \nu} \sim \frac{R^2 U_L L}{\alpha L^2 \nu} \sim \frac{\text{Re}_L R^2}{\alpha l^2 \text{Re}_L^{3/2}} \sim \frac{1}{\alpha \text{Re}_L^{1/2}} \frac{R^2}{l^2},$$

$$\frac{\omega_l}{\beta} \sim \frac{\omega_l}{\omega_L} \frac{\omega_L}{\beta} \sim \text{Re}_L^{1/2} \frac{1}{\alpha \text{Re}_L^{1/2}} \frac{R^2}{l^2} \sim \frac{1}{\alpha} \frac{R^2}{l^2}.$$

Из приведенных оценок можно легко заметить, что для выполнения требования $\omega_l^{-1} < \beta^{-1} < \omega_L^{-1}$, необходимого для использования формулы (5), нужно, чтобы размеры частиц удовлетворяли условиям $\alpha^{1/2} < R/l < \alpha^{1/2} \text{Re}_L^{1/4}$. Если же размеры частиц настолько малы, что выполняется неравенство $R < \alpha^{1/2} l$, то основной вклад в интеграл (2) дают значения τ , меньшие, чем ω_l^{-1} . Поэтому вместо формулы (5) надо для корреляционной функции пользоваться другой формулой (2)

$$Q(\tau) = Q(0) - k_4 (\varepsilon_0^3 / \rho_0^3 \nu)^{1/2} \tau^2. \quad (6)$$

Подставляя формулы (5) и (6) в (2) и производя интегрирование, получим значения средних квадратичных скоростей относительного движения частиц

$$(\overline{V^2})^{1/2} = k_5 \frac{\varepsilon_0^{1/2} |1 - \alpha|}{\rho_0^{1/2} \alpha^{1/2} \nu^{1/2}} R, \quad \text{если } \alpha^{1/2} l < R < \alpha^{1/2} \text{Re}_L^{1/4} l; \quad (7)$$

$$(\overline{V^2})^{1/2} = k_6 \frac{\varepsilon_0^{3/4} |1 - \alpha|}{\rho_0^{3/4} \alpha \nu^{5/4}} R^2, \quad \text{если } R < \alpha^{1/2} l. \quad (8)$$

Сравнив формулы (7) и (8), можно легко заметить, что при $R \approx \alpha^{1/2} l$ они переходят одна в другую. Кроме того, принимая во внимание, что $\varepsilon_0/\rho_0 \sim U_L^3/L \sim U_L^2 \omega_L$, нетрудно убедиться, что формула (7) получается в предельном случае $\omega_L \ll \beta$ из соотношения, выведенного нами ранее (1), где использована эмпирическая формула для корреляционной функции. Последняя формула правильно описывает поведение истинной корреляционной функции при достаточно больших временах корреляции, становится, однако, не применимой вблизи точки $\tau = 0$. Из сказанного ясно, почему формула (8) не получается в пределе из соответствующей формулы работы (1).

Используя (7), (8) и (1), находим величину полной диссипации энергии в единице объема в единицу времени

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \left[1 + k_7 (1 - \alpha)^2 \frac{\gamma}{\alpha} \right], \quad \text{если } \alpha^{1/2} l < R < \alpha^{1/2} \text{Re}_L^{1/4} l; \quad (9)$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \left[1 + k_8 (1 - \alpha)^2 \frac{\gamma}{\alpha} \frac{R^2}{\alpha l^2} \right], \quad \text{если } R < \alpha^{1/2} l. \quad (10)$$

Из вида формул (9) и (10) следует, что если твердые частицы взвешены в газе (в этом случае $\alpha \sim 10^{-3}$), то уже при $\gamma \sim 10^{-3}$ добавочная диссипация энергии в смеси, обязанная частицам, становится сравнимой с диссипацией в чистом газе. Для случая частиц, находящихся в жидкости, $\alpha \sim 1$ и $\varepsilon = \varepsilon_0$, т. е. наличие малого объемного содержания взвешенных частиц практически не меняет величины диссипируемой энергии.

Полученные результаты могут быть интерпретированы следующим образом. Для жидкой взвеси плотности частиц и жидкости сравнимы. Вследствие этого увлечение жидкостью частиц будет почти полным и диссипация энергии, обязанная относительному движению жидкости и частиц, будет малой. Если же частицы взвешены в газе, то из-за большой разницы в плотностях частиц и газа относительная скорость их движения становится настолько большой, что диссипируемая на поверхности частиц энергия становится сравнимой с энергией, диссипируемой в объеме чистого газа. Тот факт, что формула (9) не содержит вязкости газа, связан с тем, что вязкость играет двойную роль в механизме диссипации энергии на поверхности частиц. С одной стороны, с ростом вязкости при заданной скорости относительного движения растет диссипация энергии на каждой частице. Но, с другой стороны, при этом увеличивается увлечение частицы газом, что приводит к уменьшению относительной скорости, а значит, оба эффекта компенсируют друг друга для частиц размером $\alpha^{1/2}l < R < \alpha^{1/2}Re_L^{1/4}l$. Благодаря этому явной зависимости величины ε от ν в формуле (9) не будет. Для более мелких частиц эффект влияния вязкости на изменение относительной скорости оказывается более существенным, и поэтому для них с ростом вязкости величина ε падает.

Кроме диссипации энергии потока на поверхности частиц, связанной с их инерционностью, существует еще диссипация энергии ε_1' , обязанная движению частиц относительно среды под действием поля тяжести. Учитывая, что скорость свободного падения частиц $U = g/\beta$, а также воспользовавшись формулами (7) и (8), сравним между собой величины ε_1 и ε_1' . Если $\alpha^{1/2}l < R < \alpha^{1/2}Re_L^{1/4}l$, то

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1'} = \frac{\bar{V}^2}{U^2} \sim \frac{\beta^2 \varepsilon_0}{\rho_0 g^2 \beta} \sim \frac{\alpha U_l^4}{g^2 R^2} \sim \left(\frac{a_l}{g} \right)^2 \frac{a_l^2}{R^2}. \quad (11)$$

Если же $R < \alpha^{1/2}l$, то

$$\varepsilon_1 / \varepsilon_1' = \bar{V}^2 / U^2 \sim \beta^2 a_l^2 / g^2 \beta^2 \sim (a_l / g)^2. \quad (12)$$

Через a_l в формулах (11) и (12) обозначено ускорение пульсаций масштаба l . Из вида формул (11) и (12) следует, что если выполняется условие $a_l < g$, то инерционной диссипацией энергии потока на частицах ε_1 всегда можно пренебречь по сравнению с гравитационной диссипацией ε_1' . Если же выполняется обратное неравенство $a_l > g$, то инерционная диссипация может оказаться больше, чем гравитационная.

Институт электрохимии
Академии наук СССР

Поступило
7 IX 1966

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ В. Г. Левич, С. И. Кучанов, ДАН, 174, № 4 (1967). ² S. Corrsin, Mécanique de la turbulence, Coll. Intern. du CNRS à Marseille, Paris, 1962, p. 27.