

А. М. БРОДСКИЙ, член-корреспондент АН СССР В. Г. ЛЕВИЧ

О ФОРМУЛИРОВКЕ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ РАССЕЯНИЯ С ПЕРЕСТРОЙКОЙ В КООРДИНАТНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ

В настоящей статье мы воспроизведем в координатном представлении вывод несингулярных интегральных уравнений для задачи рассеяния с перестройкой с участием трех составных фрагментов. Полученные соотношения позволяют, в развитие соображений ⁽¹⁾, выяснить трудности, возникающие при попытках использования в задаче с перестройкой адиабатического приближения, указывают на необходимость ограничения выбора эффективных потенциалов в методе искаженных волн, а также дают возможность простого способа получения общих пороговых формул. При этом, благодаря использованию координатного представления, все рассуждения приобретают весьма наглядный характер.

Рассмотрим сначала рассеяние с перестройкой в системе из трех состоящих из различных частиц фрагментов при энергиях, при которых открыты только каналы реакции, отвечающие объединению каких-либо двух фрагментов в связанное состояние. Выберем начало отсчета энергии E в системе общего центра масс так, чтобы указанное условие выражалось как $E \leq 0$. Фрагменты пронумеруем индексом $\alpha = 1, 2, 3$ и обозначим их массы m_α . Рассматриваемые каналы реакции также обозначим индексом α , причем подразумевается, что в канале реакции α фрагмент α уходит на бесконечность, а два других фрагмента остаются связанными. В каждом канале введем координаты Якоби $R_\alpha, r^\alpha(\xi_\alpha)$, где R_α — расстояние между центром тяжести фрагмента α и общим центром тяжести двух остальных фрагментов; r_α — расстояние между центрами тяжести этих двух фрагментов и (ξ_α) — остальные «внутренние» координаты, которые в дальнейшем явным образом не входят и выписываться не будут. Гамильтониан системы обозначим $\mathcal{H} = \mathcal{K} + V = \mathcal{K} + V_\alpha + v_\alpha$, где $\mathcal{K}$ — оператор кинетической энергии $\mathcal{K} = P_\alpha^2/2M_\alpha + p_\alpha^2/2m_\alpha$ ($\alpha = 1, 2, 3$) и v_α означает ту часть взаимодействий, которая обращается (по предположению достаточно быстро) в нуль при $R_\alpha \rightarrow \infty$. При этом P_α и p_α — операторы импульсов, соответствующих движению по координатам R_α и r_α , $M_\alpha = m_\alpha(m_\beta + m_\gamma)/M$, $m_\alpha = m_\beta m_\gamma/(m_\beta + m_\gamma)$, $M = m_1 + m_2 + m_3$ ($\alpha \neq \beta, \gamma$; $\gamma \neq \alpha, \beta$). Полную волновую функцию задачи рассеяния Ψ мы будем искать в виде суммы $\Psi = \Psi_1 + \Psi_2 + \Psi_3$, где каждая из функций Ψ_α имеет ненулевую асимптотику требующегося в задаче рассеяния вида только в «своем» канале и нулевую асимптотику в остальных каналах и удовлетворяется система уравнений

$$\begin{aligned}(\mathcal{K} + v_1 - E)\Psi_1 &= -V_1(\Psi_2 + \Psi_3), \\(\mathcal{K} + v_2 - E)\Psi_2 &= -V_2(\Psi_3 + \Psi_1), \\(\mathcal{K} + v_3 - E)\Psi_3 &= -V_3(\Psi_1 + \Psi_2).\end{aligned}\tag{1}$$

Разделение функций Ψ на части эквивалентно перестройке уравнения Липпмана — Швингера, выполненной Л. Д. Фаддеевым ⁽²⁾, и производилось ранее Сакавой ⁽³⁾. Покажем возможность непротиворечивого построения функций Ψ_α с указанными свойствами непосредственно в координатном (а не используемом обычно импульсном) представлении. При этом система (1) обладает тем принципиальным преимуществом по срав-

нению с уравнением Шредингера для Ψ , что входящие в (1) источники локализованы в пространстве переменных R_α , r_α по всем направлениям, что позволяет непосредственно перейти от (1) к «хорошим» интегральным уравнениям с помощью функций Грина G_α ($\alpha = 1, 2, 3$), имеющих в «своем» координатном представлении вид

$$\begin{aligned} & \langle R'_\alpha, r'_\alpha | G_\alpha | R_\alpha, r_\alpha \rangle = \\ & = i \sum_{LMlmn_\alpha} \int_0^\infty d\mathcal{E}_\alpha \left\{ \frac{1}{k_\alpha R_\alpha} Y_{LM} \left(\frac{R_\alpha}{R_\alpha} \right) \varphi_\alpha(lmn_\alpha \mathcal{E}_\alpha; r_\alpha) [\theta(R_\alpha - R'_\alpha) h_{L+1/2}^{(1)}(k_\alpha R_\alpha) \times \right. \\ & \quad \times j_{L+1/2}(k_\alpha R_\alpha) + \theta(R'_\alpha - R_\alpha) h_{L+1/2}^{(1)}(k_\alpha R'_\alpha) j_{L+1/2}(k_\alpha R_\alpha)] \cdot \frac{1}{R'_\alpha} Y_{LM} \times \\ & \quad \times \left(\frac{R'_\alpha}{R'_\alpha} \right) \varphi_\alpha(lmn_\alpha \mathcal{E}_\alpha; r'_\alpha) \left. \right\}, \end{aligned} \quad (2)$$

$$k_\alpha = \sqrt{2M_\alpha(E - \mathcal{E}_\alpha) + i\varepsilon}, \quad \varepsilon \rightarrow +0,$$

где $h_{L+1/2}^{(1)}$ и $j_{L+1/2}$ — функции Рикатти — Бесселя, причем $h_{L+1/2}^{(1)}(k_\alpha R_\alpha)$ при $R_\alpha \rightarrow \infty$ содержит только расходящиеся или затухающие волны; Y_{LM} — нормированные на единичный телесный угол сферические гармоники и $\varphi_\alpha(lmn_\alpha \mathcal{E}_\alpha; r_\alpha)$ — составляющие полный набор решения уравнения

$$(p_\alpha^2/2m_\alpha + V_\alpha - \mathcal{E}_\alpha) \varphi_\alpha = 0, \quad (3)$$

причем $\mathcal{E}_\alpha$ пробегает весь спектр значений двухчастичной задачи*, начиная с существующего по предположению нижнего значения $\mathcal{E}_{0\alpha}$; l, m — полный внутренний момент и проекция момента количества движения и n_α — остальные дискретные квантовые числа фрагментов. При этом мы пользуемся результатами (4) об одинаковом значении энергии порога развала во всех каналах реакции. Систему (1) вместе с граничными условиями задачи рассеяния можно представить в виде матричного интегрального уравнения с вполне непрерывным ядром, совпадающим с ядром уравнений Фаддеева:

$$\Psi_i = \Psi_{0i} = G V \Psi_i, \quad (4)$$

где

$$\Psi_i = \begin{vmatrix} \Psi_{1i} \\ \Psi_{2i} \\ \Psi_{3i} \end{vmatrix}, \quad G_0 = \begin{vmatrix} G_1 & 0 & 0 \\ 0 & G_2 & 0 \\ 0 & 0 & G_3 \end{vmatrix}, \quad V = \begin{vmatrix} 0 & V_1 & V_1 \\ V_2 & 0 & V_2 \\ V_3 & V_3 & 0 \end{vmatrix}, \quad (5)$$

индекс i отвечает фиксированному начальному состоянию, которое описывается 3×1 -матрицей (столбцом), содержащей в зависимости от постановки задачи произведение падающей плоской или сферической волны на соответствующее связанное состояние в строке, отвечающей начальному каналу, и нуль в остальных строках. Решение уравнения (4) действительно удовлетворяет необходимым условиям, так как при $R_\alpha \rightarrow \infty$ второе слагаемое правой части содержит незатухающие сферические волны только в канале α . Это следует из того, что каждая из функций Грина, составляющих матрицу G_0 , умножается на локализованный источник, и, следовательно, в рассматриваемом пределе (при $R_\alpha \rightarrow \infty$) слагаемые (2), содержащие $\theta(R'_\alpha - R_\alpha)$, обращаются в нуль. В каждом из «посторонних» каналов функции Ψ_α обращаются асимптотически в нуль, поскольку в этом случае стремятся к бесконечности одновременно r_α и R_α . При этом надо иметь в виду, что на физическом листе положительным $E - \mathcal{E}_\alpha$ соответствует в функциях Рикатти — Бесселя подход к разрезу сверху, а при

* Интеграл по $d\mathcal{E}_\alpha$ в (2) включает суммирование по дискретному спектру и интегрирование по непрерывному спектру.

$E - \mathcal{E}_\alpha < 0$ как $h_{L+1/2}^{(1)}$, так и $j_{L+1/2}$ ведут себя как $e^{-|k_\alpha| R_\alpha}$. Существенно подчеркнуть, что приведенные соображения о локализации Ψ_α в своих каналах пригодны лишь при $E \leq 0$; при $E > 0$ вся аргументация должна быть, очевидно, существенно модифицирована, причем, возможно, необходим переход, как в ^(2, 3), к импульсному представлению, так как интервал интегрирования $0 < \mathcal{E}_\alpha \leq E$ в функциях Грина (2) после подстановки их в (4) будет давать незатухающие волны, отвечающие каналу развала системы на три фрагмента и «перекрывающиеся» со всеми остальными каналами.

Рассматривая асимптотику правой части (4) после подстановки (2), получаем, что амплитуда рассеяния в состоянии $f = \{l_\alpha^f, m_\alpha^f, n_\alpha^f, L_\alpha^f, M_\alpha^f, \mathcal{E}_\alpha\}$ канала α , определяемая коэффициентом перед соответствующей асимптотической расходящейся сферической волной, задается в координатном представлении выражением

$$A_{fi} = \int \Psi_{of}^*(\mathbf{R}_\alpha, \mathbf{r}_\alpha) V_{\alpha f}(\mathbf{r}_\alpha) (\Psi_{i\beta} + \Psi_{i\gamma}) d^3\mathbf{R}_\alpha d^3\mathbf{r}_\alpha, \quad (6)$$

$$\Psi_{of}(\mathbf{R}_\alpha, \mathbf{r}_\alpha) = \frac{1}{k_\alpha R_\alpha} Y_{LM} \left(\frac{\mathbf{R}_\alpha}{R_\alpha} \right) j_{L+1/2}(k_\alpha R_\alpha) \varphi_\alpha(l_\alpha, m_\alpha, n_\alpha, \mathcal{E}_\alpha; \mathbf{r}_\alpha)$$

или в матричной записи

$$A_{fi} = (\Psi_{of}, \mathbf{V} \Psi_i), \quad (7)$$

где скобки означают скалярное произведение, включающее интегрирование по всем координатам, а Ψ_{of} — столбец с одной не равной нулю строкой, отвечающей конечному каналу.

Введем символическое решение (4), записав его в виде столбца Ψ_i

$$\Psi_i = \Psi_{oi} - \mathbf{G} \mathbf{V} \Psi_{oi}, \quad (8)$$

где $\mathbf{G}$ — решение уравнения с «хорошим» ядром (вследствие отсутствия диагональных элементов в матрице $\mathbf{V}$)

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}_0 - \mathbf{G}_0 \mathbf{V} \mathbf{G}_0. \quad (9)$$

С помощью (8) амплитуда A_{fi} представляется следующим образом:

$$A_{fi} = (\Psi_{of}, (\mathbf{V} - \mathbf{V} \mathbf{G} \mathbf{V}) \Psi_{oi}). \quad (10)$$

Подчеркнем, что при выводе (10) мы нигде не пользовались условием ортогональности волновых функций различных каналов. Интересно также отметить, что (10) содержит члены, входящие в формулу Гельмана — Гольдбергера ⁽⁵⁾ в перестроенном виде. Если говорить на языке графиков Вейнберга ⁽⁶⁾, то последним (левым) взаимодействием в записи выражений для амплитуды является взаимодействие, обуславливающее образование связанного состояния.

Все предыдущие рассуждения может быть просто обращено на случай большего числа фрагментов, а также на случай наличия тождественных частиц в различных фрагментах. В последнем случае число каналов реакции должно быть увеличено соответственно возможному числу перестановок тождественных частиц между фрагментами, причем увеличивается число уравнений в системе (1). Последующая симметризация позволяет восстановить число уравнений, причем в новую систему будут входить уже нелокальные взаимодействия, содержащие оператор перестановок. Построение, подобное проведенному выше, возможно, очевидно, только при определенном разделении взаимодействий в различных каналах. Таким образом, данный подход, так же как вообще перестройка Л. Д. Фаддеева, не допускает, как было отмечено в ⁽¹⁾, разложения функций Ψ по так называемым адиабатическим функциям, т. е. собственным функциям полного гамильтониана, из которого исключена та или иная часть оператора

кинетической энергии. Последнее разложение особенно часто используется в атомно-молекулярных задачах без необходимого сведения получающихся уравнений к системе с «хорошим» ядром.

Разбиение взаимодействий, на котором основана запись уравнений (1), не является единственным. Например, к V_1 мы можем добавить любое эффективное убывающее с расстоянием взаимодействие вида $W(R_1)P_1$, где P_1 — оператор проектирования на собственные функции (3), отвечающие дискретному спектру в канале 1, и, соответственно, вычесть это взаимодействие из V_2 и (или) V_3 . При этом взаимодействие $W(R_1)$ не должно не вызывать перестройки и, например, зависеть только от R_1 . Все рассмотрение остается неизменным, лишь изменяются функции, из которых в координатном представлении строится функция Грина. Введение оператора P_1 является обязательным для сохранения локального характера источников в (1). Подобным образом можно получить формулы, аналогичные формулам метода искаженных волн, и провести обобщенное пороговое рассмотрение, учитывающее дальнююдействующую часть потенциала. Это будет сделано в дальнейшей работе.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
15 IV 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ А. М. Бродский, В. Г. Левич, ДАН, **191**, № 1, 126 (1970). ² Л. Д. Фаддеев, ЖЭТФ, **39**, 1459 (1960); Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, **69** (1963).
³ T. Sasakawa, Phys. Rev., **158**, 1249 (1967). ⁴ W. Hunziker, Helv. phys. acta, **39**, 451 (1966). ⁵ М. Гольдбергер, К. Ватсон, Теория столкновений, М., 1967.
⁶ S. Weinberg, Phys. Rev., **133**, B 232 (1964).