

ДВИЖЕНИЕ РТУТНЫХ КАПЕЛЬ В ПОЛЕ ТЯЖЕСТИ И В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

В. Г. Левин и В. А. Мямлин

Рассматривается падение ртутных капель в электролите. Вся система, т. е. ртуть и электролит, помещается в магнитное поле, перпендикулярное к гравитационному полю. В результате воздействия магнитного поля капля приобретает дополнительную скорость, перпендикулярную к гравитационному и магнитному полям. Эта скорость обуславливается следующим движением заряда в системе [1].

При падении ртутных капель в гравитационном поле на границе ртути и раствора создается двойной электрический слой. Внешний заряд двойного слоя лежит в растворе, а внутренний — в капле. Движение жидкости смещает заряд двойного слоя от передней стороны капли к задней. Во внешнем растворе существует еще электрическое поле, которое вызовет движение объемного тока в обратном направлении, от передней стороны капли к задней. Внутри капли также существует постоянное электрическое поле,двигающее положительные заряды от передней стороны капли к задней. Если теперь поместить всю эту систему в магнитное поле, то на раствор и каплю будут действовать дополнительные силы, которые в результате приведут в движение каплю.

В расчете предполагалось, что магнитные поля таковы, что скорость движения раствора, обусловленная магнитными силами, значительно меньше, чем соответствующие скорости чисто гравитационного происхождения. В связи с этим мы считаем, что потенциал в растворе определяется только гравитационным движением жидкости и что приращение потенциала, создаваемое дополнительным движением, мало.

ТОКИ И СИЛЫ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ В СИСТЕМЕ

Вычисления будем производить в системе, где капля покоится. Ось z выберем в направлении падения капли. Поле H будем считать направленным по оси y .

В растворе существует электрическое поле, потенциал которого дается формулой [1]

$$\varphi = \frac{\epsilon v_0 a^2 \cos \theta}{\kappa r^2}, \quad (1)$$

где ϵ — поверхностный заряд двойного слоя, который расположен в растворе; a — радиус капли, κ — проводимость раствора, θ — угол между радиусом-вектором и осью z , v_0 задается выражением [1]

$$v_0 = \frac{(\rho - \rho') g a^2}{3 \left(2\mu + 3\mu' + \frac{\epsilon^2}{\kappa} \right)} \quad (2)$$

(ρ' — плотность ртути, ρ — плотность раствора, μ' — вязкость ртути, μ — вязкость раствора).

Сила, действующая на раствор, определяется формулой Лоренца

$$\vec{F} = \frac{[\vec{l} \vec{H}]}{c}, \quad \vec{j} = -\kappa \text{ grad } \varphi. \quad (3)$$

Внутри капли течет поверхностный ток $-\epsilon \bar{v}_l$, его проекция на орт $\bar{e}_0$ в сферической системе координат

$$\gamma_{\text{пов } \theta} = -\epsilon v_0 \sin \theta. \quad (4)$$

Постоянное электрическое поле, существующее внутри капли, может быть определено из условия сохранения заряда на внутренней поверхности капли

$$\gamma_n + \text{div } \bar{j}_{\text{по } 1} = 0. \quad (5)$$

Поверхностная дивергенция может быть легко определена

$$\text{div } \bar{j}_{\text{пов}} = -\frac{2\epsilon v_0 \cos \theta}{a}. \quad (6)$$

Тогда объемный ток получается из уравнения (5)

$$\bar{j} = -\frac{2v_0\epsilon}{a} \bar{k}, \quad (7)$$

где $\bar{k}$ — единичный орт в направлении оси z . Наконец, сила, действующая на единицу объема ртути, задается

$$\bar{F} = \frac{[\bar{j} \bar{H}]}{c} = \frac{2v_0\epsilon H}{ac} \bar{i}, \quad (8)$$

$\bar{i}$ — орт в направлении оси x .

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ — СТОКСА

Решение дифференциальных уравнений будем производить в системе, где капля покоится.

Уравнение Навье — Стокса для внешнего раствора имеет вид

$$-\text{grad } p' + \mu \Delta \bar{v}' + F' = 0, \quad (9)$$

Здесь p' — давление внешнего раствора, $\bar{v}'$ — скорость движения внешнего раствора, F' — сила действующая на единицу объема раствора:

$$F' = m(\rho - \rho') g \bar{k} + \bar{F}, \quad (10)$$

где величина $\bar{F}$ дается формулой (3).

Давление и скорости можно представить в виде суммы

$$p' = p_1 + p_0; \quad \bar{v}' = \bar{v}_1 + \bar{v}_0, \quad (11)$$

где величины с нулевым индексом удовлетворяют уравнению

$$-\text{grad } p_0 + \mu \Delta \bar{v}_0 + m(\rho - \rho') g \bar{k} = 0. \quad (12)$$

Решение этого уравнения получено в работе В. Г. Левича [1]. Нам необходимо, следовательно, решить уравнения

$$-\text{grad } p_1 + \mu \Delta \bar{v}_1 + \bar{F} = 0; \quad \text{div } \bar{v}_1 = 0. \quad (13)$$

Аналогично для внутренней части нужно решить уравнения

$$-\text{grad } p + \mu' \Delta \bar{v} + \frac{2v_0\epsilon H}{ac} \bar{i} = 0; \quad \text{div } \bar{v}_1 = 0. \quad (14)$$

Граничные условия для этих уравнений следующие.

При $r = a$ должно выполняться

$$\begin{aligned}\sigma'_{rr} &= \sigma_{rr}, & v'_r &= v_r = 0; \\ \sigma'_{r\theta} &= \sigma_{r\theta}, & v'_\theta &= v_\theta; \\ \sigma'_{\varphi r} &= \sigma_{\varphi r}, & v'_\varphi &= v_\varphi,\end{aligned}$$

где σ_{ik} — компоненты тензора напряжений;

при $r = 0$ скорости должны быть конечны;

при $r \rightarrow \infty$

$$\bar{v} = v_\infty \bar{i} \quad (15)$$

Уравнения могут быть решены в предположении, что скорости, обусловленные электромагнитными силами, значительно меньше скоростей гравитационного происхождения.

Решение дифференциальных уравнений нужно искать в виде:

$$\begin{aligned}v_r &= f(r) \sin \theta \cos \varphi; \\ v_\theta &= \Psi(r) \cos \theta \cos \varphi; \\ v_\varphi &= \sin \varphi [\alpha(r) + \beta(r) \sin^2 \theta]; \\ p &= \mu \gamma(r) \sin \theta \cos \varphi.\end{aligned} \quad (16)$$

Здесь $f(r)$; $\Psi(r)$; $\alpha(r)$ — неизвестные функции радиуса, θ и φ — соответствующие углы в сферической системе координат. Если записать уравнение (13) в сферической системе координат, то для функций от радиуса будем иметь следующую систему уравнений ($r > a$):

$$\begin{aligned}\alpha(r) &= -\Psi(r); \\ f' - \frac{2\Psi}{r} + \frac{2f}{r} + \frac{\beta}{r} &= 0; \\ -\gamma' + \frac{4f'}{r} + f'' - \frac{\varepsilon v_0 a^2 H}{c \mu r^3} &= 0; \\ \frac{\gamma}{r} + \alpha'' + \frac{2\alpha'}{r} + \frac{2\beta}{r^2} - \frac{2f}{r^2} + \frac{2\Psi}{r^2} - \frac{2\varepsilon v_0 a^2 H}{c \mu r^3} &= 0; \\ \beta'' + \frac{2\beta'}{r} - \frac{6\beta}{r^2} + \frac{3\varepsilon v_0 a^2 H}{c \mu r^3} &= 0.\end{aligned} \quad (17)$$

Здесь штрихи над функциями обозначают дифференцирование по r . Движение жидкости внутри капли определяется аналогичными уравнениями.

Решение системы может быть проведено стандартными методами, и мы имеем следующие результаты решения для скоростей и давления внутри капли ($r < a$)

$$\begin{aligned}\bar{v}_r &= (F + xr^2) \sin \theta \cos \varphi; \\ v_\theta &= \left(F + \frac{B}{2} r^2 + 2xr^2 \right) \cos \theta \cos \varphi; \\ \bar{v}_\varphi &= \sin \varphi \left[\left(-F - \frac{B}{2} r^2 - 2xr^2 \right) + Br^2 \sin^2 \theta \right]; \\ p &= 10 \mu' x r \sin \theta \cos \varphi + \frac{2v_0 \varepsilon H}{ac} r \cos \varphi \sin \theta.\end{aligned} \quad (18)$$

Если обозначить

$$n = \frac{v_0 \varepsilon H}{c}, \quad (19)$$

то для скоростей и давления вне капли имеем ($r > a$)

$$\begin{aligned}\bar{v}_r &= \left(\frac{D_1}{r^3} + \frac{E_1}{r} + v_\infty \right) \sin \theta \cos \varphi; \\ \bar{v}_\theta &= \left(\frac{A_1 - D_1}{2r^3} + \frac{na^2}{4\mu r} + \frac{E_1}{2r} + v_\infty \right) \cos \theta \cos \varphi; \\ \bar{v}_\varphi &= \sin \varphi \left[\frac{D_1 - A_1}{2r^3} - \frac{na^2}{4\mu r} - \frac{E_1}{2r} - v_\infty \right] + \left(\frac{A_1}{r^3} + \frac{na^2}{2\mu r} \right) \sin^2 \theta; \\ p &= \mu \left(\frac{na^2}{2\mu r^2} + \frac{E_1}{r^2} \right) \sin \theta \cos \varphi.\end{aligned}\quad (20)$$

Здесь величины F_1 , D_1 , E_1 , A_1 , x и т. д. — константы, которые должны быть определены из граничных условий (15), дающих следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}F + xa^2 &= 0; \\ \frac{D_1}{a^3} + \frac{E_1}{a} + v_\infty &= 0; \\ F + \frac{Ba^2}{2} + 2xa^2 &= \frac{A_1}{2a^3} - \frac{D_1}{2a^3} + \frac{na}{4\mu} + \frac{E_1}{2a} + v_\infty; \\ Ba^2 &= \frac{A_1}{a^3} + \frac{na}{2\mu}; \\ \mu' Ba &= \left(-\frac{4A_1}{a^4} - \frac{n}{\mu} \right) \mu; \\ -6x\mu' - 2n &= -\frac{n}{2} - \frac{3\mu E_1}{a^2} - \frac{6D_1\mu}{a^4}; \\ \mu' \left[3xa + \frac{Ba}{2} \right] &= \mu \left(\frac{3D_1}{a^4} - \frac{n}{2\mu} - \frac{2A_1}{a^4} \right).\end{aligned}\quad (21)$$

После решения системы видим, что скорость движения жидкости на бесконечности относительно капли равна

$$v_\infty = -\frac{a}{\mu} \frac{v_0 \varepsilon H}{c} \frac{(\mu + \mu')}{(3\mu' + 2\mu)}, \quad (22)$$

где v_0 находится по формуле (2). Окончательно получаем

$$v_\infty = -\frac{ga^3}{3\mu} \frac{\varepsilon H}{c} \frac{(\mu + \mu')(\rho - \rho')}{(3\mu' + 2\mu)(2\mu + 3\mu' + \frac{\varepsilon}{\kappa})}, \quad (23)$$

Для оценки этой величины рассмотрим падение ртутных капель в глицерине в поле $H = 10^5$ гаусс.

Выбрав $\varepsilon = 10^{-5}$ С/см², $a = 0,1$ см, находим, что скорость $F \approx 10^{-2}$ см/сек.

ВЫВОДЫ

В работе рассмотрено движение ртутных капель в электролите, когда вся система помещена в поле тяжести и в магнитное поле. Расчет, проведенный в системе, где капля покоится, дает следующий результат: кроме вертикального падения в поле тяжести возникает добавочное движение капли в направлении, перпендикулярном как полю тяжести, так и магнитному полю. Получено значение для скорости движения и оценена ее величина.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Г. Л е в и ч, Физико-химическая Гидродинамика, ГИТТЛ, М., 1952.

THE MOTION OF MERCURY DROPS IN A GRAVITATIONAL AND A MAGNETIC FIELDS

V. G. Levich and V. A. Myamlin (Moscow)

Summary

The fall of mercury drops in an electrolyte has been studied, when the system is placed in gravitational and magnetic fields.

Calculation carried out for a system where the drop is at rest has yielded the following results. Interaction between the magnetic field and electrical current flowing in the system leads to an additional motion of the liquid with respect to the drop in a direction perpendicular to the both gravity and the magnetic fields.

A formula has been obtained for the velocity of this motion, and the magnitude of the latter has been estimated.