Доклады Академии наук СССР
1956. Том 109, № 5

ФИЗИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

В. Г. ЛЕВИЧ

К ВОПРОСУ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ФРОНТА ПЛАМЕНИ ПРИ МЕДЛЕННОМ ГОРЕНИИ ЖИДКОСТЕЙ

(*Представлено академиком А. Н. Фрумкиным 13 III 1956*)

Одним из существенных вопросов теории медленного горения является вопрос об устойчивости этого режима. В случае горения в жидких веществах стабилизация фронта пламени может, повидимому, достигаться при помощи совместного влияния поля тяжести и вязкости жидкости.

Как известно, горение жидких веществ, например, типа нитрогликоля происходит в газовой пленке, образующейся над поверхностью жидкости и при ее испарении ([1]). Поскольку ширину зоны горения можно считать малой по сравнению с характерными размерами сосуда, можно формально рассматривать ее как бесконечно тонкую и говорить о поверхности разрыва, отделяющей исходное вещество от продуктов сгорания. Отличие этой поверхности разрыва от поверхности разрыва при горении газообразных веществ состоит лишь в том, что ей нужно приписать некоторое поверхностное натяжение σ, поскольку исходным веществом является жидкость, а продуктом горения — газ.

Стабилизирующее влияние поверхностного натяжения на режим горения было исследовано Л. Д. Ландау ([2]). В дальнейшем будет, однако, показано, что оно уступает стабилизирующему влиянию вязкости жидкости, и чтобы не усложнять выкладок, мы не будем его учитывать (т. е. положим $\sigma = 0$).

Выберем некоторый малый участок поверхности разрыва, который можно считать плоским, и рассмотрим движение вблизи него. Невозмущенное движение жидкости стационарно и направлено перпендикулярно к поверхности разрыва. Введем оси координат (x, y, z), выбрав поверхность разрыва за плоскость (x, y) и направив ось z по направлению скорости движения жидкости. Тогда полупространство $z<0$ будет заполнено исходной жидкостью, а полупространство $z>0$ — продуктами горения. Невозмущенное движение несгоревшей жидкости впереди разрыва совершается со скоростью u_1, сгоревшего газа позади разрыва — со скоростью u_2.

Для исследования устойчивости режима горения наложим на стационарное невозмущенное движение бесконечно малое возмущение v, периодическое во времени и по координате x.

Для определения возмущенного движения будем исходить из уравнений Навье — Стокса и уравнения непрерывности для обеих жидкостей — несгоревшей и сгоревшей:

$$\rho^\alpha\left(\frac{\partial v_z^\alpha}{\partial t} + u^\alpha \frac{\partial v_z^\alpha}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p^\alpha}{\partial z} + \nu^\alpha\left(\frac{\partial^2 v_z^\alpha}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z^\alpha}{\partial z^2}\right) + \rho^\alpha g,$$

$$\rho^\alpha\left(\frac{\partial v_x^\alpha}{\partial t} + u^\alpha \frac{\partial v_x^\alpha}{\partial x}\right) = -\frac{\partial p^\alpha}{\partial x} + \nu^\alpha\left(\frac{\partial^2 v_x^\alpha}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x^\alpha}{\partial z^2}\right),$$

$$\frac{\partial v_x^\alpha}{\partial x} + \frac{\partial v_z^\alpha}{\partial z} = 0,$$

где индекс α пробегает значения $\alpha = 1, 2$, причем индекс 1 относится к несгоревшей и индекс 2 — к сгоревшей жидкости. Здесь v_x^α, v_z^α — компоненты возмущенной скорости; u^α — невозмущенная скорость; ρ^α — плотность; ν^α — кинематическая вязкость жидкости.

Общее решение этих уравнений, периодическое по координате и исчезающее на бесконечности, для несгоревшей жидкости имеет вид:

$$v_z = Ae^{i(hx+kz)}e^{\gamma t} + Ce^{(ikx+l_1 z)}e^{\gamma t}, \tag{1}$$

$$v_x = iAe^{i(kx+hz)}e^{\gamma t} + i\frac{l_1}{k}Ce^{(ikx+l_1 z)}e^{\gamma t}, \tag{2}$$

$$p = -\rho_1\left(\frac{\gamma}{k} + u_1\right)Ae^{(ikx+hz)}e^{\gamma t} - \rho_1 gz. \tag{3}$$

Здесь величина l_1 равна

$$l_1 = \frac{u_1}{2\nu_1} + \sqrt{\frac{u_1^2}{4\nu_1} + \left(\frac{\gamma}{\nu_1} + k^2\right)}, \tag{4}$$

где k — волновое число; A и C — амплитуды; $\gamma = i\omega$; ω — частота, вообще говоря, комплексная. Если вещественная часть ω положительна, амплитуда возмущенного движения будет экспоненциально расти со временем, т. е. режим движения оказывается неустойчивым. Поэтому дальнейшей нашей задачей будет именно нахождение, при помощи соответствующих граничных условий, этой частоты.

Решение уравнений Навье — Стокса и непрерывности для сгоревшего газа имеет вид:

$$v_z = Be^{i(kx-kz)}e^{\gamma t} + De^{(ikx-l_2 z)}e^{\gamma t}; \tag{5}$$

$$v_x = -i\left(Be^{i(kx+hz)}e^{\gamma t} + De^{(ikx-l_2 z)}e^{\gamma t}\right); \tag{6}$$

$$p = -\rho_2\left(\frac{\gamma}{k} - u_2\right)Be^{i(kx-hz)}e^{\gamma t}, \tag{7}$$

где

$$l_2 = -\frac{u_2}{2\nu_2} + \sqrt{\frac{u_2^2}{4\nu_2^2} + \left(\frac{\gamma}{\nu_2} + k^2\right)}; \tag{8}$$

B и D — амплитуды.

Сформулируем теперь граничные условия на поверхности разрыва, отделяющей сгоревший газ от несгоревшей жидкости. На этой поверхности поток вещества, входящего с одной стороны поверхности разрыва, равен потоку вещества, выходящего с другой стороны ее, т. е.

$$j = \rho_1 u_1 = \rho_2 u_2. \tag{9}$$

Далее, если нормальная слагающая скорости газа испытывает скачок от u_1 до u_2, то тангенциальная слагающая скорости должна оставаться непрерывной.

Пусть $\zeta(x, t)$ — малое смещение (вдоль оси z) точки поверхности разрыва при возмущении. Тогда $\partial\zeta/\partial x$ дает угол наклона возмущенной поверхности разрыва к оси x.

Условие непрерывности тангенциальной слагающей скорости имеет вид:

$$v_{tg}^{(1)} = v_x^{(1)} + u_1\frac{\partial\zeta}{\partial x} = v_{tg}^{(2)} = v_x^{(2)} + u_2\frac{\partial\zeta}{\partial x}. \tag{10}$$

Далее из условия несжимаемости следует, что скорость распространения разрыва не изменяется при наложении бесконечно малых возмущений, т. е. в выбранной нами движущейся системе координат на поверхности разрыва должны выполняться условия

$$v_x^{(1)} \cong \frac{\partial\zeta}{\partial t}, \quad v_x^{(2)} = \frac{\partial\zeta}{\partial t} \quad \text{при } z = 0. \tag{11}$$

Наконец, на поверхности разрыва, как и на всякой поверхности раздела между двумя вязкими жидкостями, должно выполняться условие равенства нормальных и касательных слагающих тензора напряжений, т. е.

$$-p^{(1)}+2\rho_1\nu_1\frac{\partial v_z^{(1)}}{\partial z}=-p^{(2)}+2\rho_2\nu_2\frac{\partial v_z^{(2)}}{\partial z}, \tag{12}$$

$$\rho_1\nu_1\left(\frac{\partial v_x^{(1)}}{\partial z}+\frac{\partial v_z^{(1)}}{\partial x}\right)=\rho_2\nu_2\left(\frac{\partial v_x^{(2)}}{\partial z}+\frac{\partial v_z^{(2)}}{\partial x}\right). \tag{13}$$

Полагая

$$\zeta = Fe^{ikx}e^{\gamma t} \tag{14}$$

и подставляя в граничные условия (10)—(14) выражения для скоростей и давлений (1)—(3) и (4)—(7), приходим после элементарных преобразований к 5 уравнениям, связывающим постоянные A, B, C, D, F и величину γ. Одна из величин, например амплитуда A, остается при этом произвольной.

Предполагая, что плотность газообразных продуктов сгорания весьма мала по сравнению с плотностью исходной жидкости, будем последовательно опускать все малые в отношении ρ_2/ρ_1 величины, чем можно существенно упростить эти уравнения. Исключая из них амплитуды, можно получить секулярное уравнение для интересующей нас величины γ.

Вводя для удобства безразмерную неизвестную $\Omega=\gamma/\nu_1k^2$ и безразмерные величины $\alpha=j/\rho_1\nu_1k$ и $\beta=g/\nu_1^2k^3$, после несложных, но весьма громоздких преобразований приходим к уравнению для определения Ω:

$$(\Omega+2)^2+\left(\beta-\frac{\rho_1}{\rho_2}\alpha\right)=\sqrt{\Omega+1}. \tag{15}$$

Обозначим через θ величину $1/\sqrt{\beta-\frac{\rho_1}{\rho_2}\alpha}$ и введем новую неизвестную

$$w=\theta(\Omega+2), \tag{16}$$

Тогда находим следующее уравнение для w:

$$(w^2+1)^2=16\theta^3(w-\theta). \tag{17}$$

Корни этого уравнения суть:

при $\theta\ll 1$ $\quad w_1=i,\ w_2=-i;$

при $\theta\gg 1$ $\quad w_3=1{,}1\ \theta-\frac{1}{2{,}2\,\theta^2}+\ldots;\ w_4=2\theta-\frac{1}{2\theta^2}-\frac{1}{4\,\theta^2}+\ldots$

Первые два корня дают для γ выражения

$$\gamma=-2\nu_1k^2\pm\sqrt{\frac{j^2k^2}{\rho_1\rho_2}-gk}. \tag{18}$$

В соответствии со сказанным выше, при $\mathrm{Re}\,\gamma>0$ амплитуда возмущения растет со временем, и движение жидкости является неустойчивым. Напротив, при $\mathrm{Re}\,\gamma<0$ возмущение затухает со временем и режим движения является устойчивым.

Для того чтобы имело место условие $\mathrm{Re}\,\gamma<0$, согласно (18) необходимо выполнение неравенства

$$j^3<3\sqrt{3}\,g\nu_1\rho_1^{3/2}\rho_2^{3/2}. \tag{19}$$

Нетрудно показать, что два других корня w_3 и w_4 приводят к значениям γ, у которых условие $\mathrm{Re}\,\gamma<0$ выражается тем же неравенством (19).

Таким образом, неравенство (19) является условием устойчивости режима медленного горения. При значении

$$j > \sqrt{3\sqrt{3}\, g \nu_1 \rho_1^{3/2} \rho_2^{3/2}} \tag{20}$$

режим медленного горения оказывается абсолютно неустойчивым и заменяется режимом турбулентного горения. Сравнивая (20) с условием устойчивости режима медленного горения, стабилизированного поверхностным натяжением, полученного Л. Д. Ландау ([2]), мы видим, что при $\nu_1 > \sigma^{3/4}/2g^{1/4}\rho_1^{3/4}$, неравенство (20) дает для j бо́льшие значения, чем полученные из соответствующего неравенства Ландау. Это означает, что при достаточно большой вязкости горящей жидкости (порядка 1 пуаза) стабилизирующим фактором является вязкость, а не поверхностное натяжение.

Из (20) нетрудно также видеть, что в случае газов вязкость не является фактором, обеспечивающим стабильность режима медленного горения.

Институт физической химии
Академии наук СССР

Поступило
13 III 1956

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Ф. Беляев, Сборн. статей по теории взрывчатых веществ, 1940. [2] Л. Ландау, Е. Лифшиц, Механика сплошных сред, 1953, стр. 576.